فصل ۱

Subject.
Date.

بردار: ابزار ریاضی برای نمایش کمیتهای فیزیکی برداری که دارای اندازه و جهت هستند

مثال: سرعت - شتاب - بردار مکان - گشتاور (Tork)

همیشه از بردار نسبت به زمان مشتق بگیریم باز بردار می‌شود

هرگاه از بردار نسبت به مکان مشتق بگیریم ← اگر بردار شد: Curl

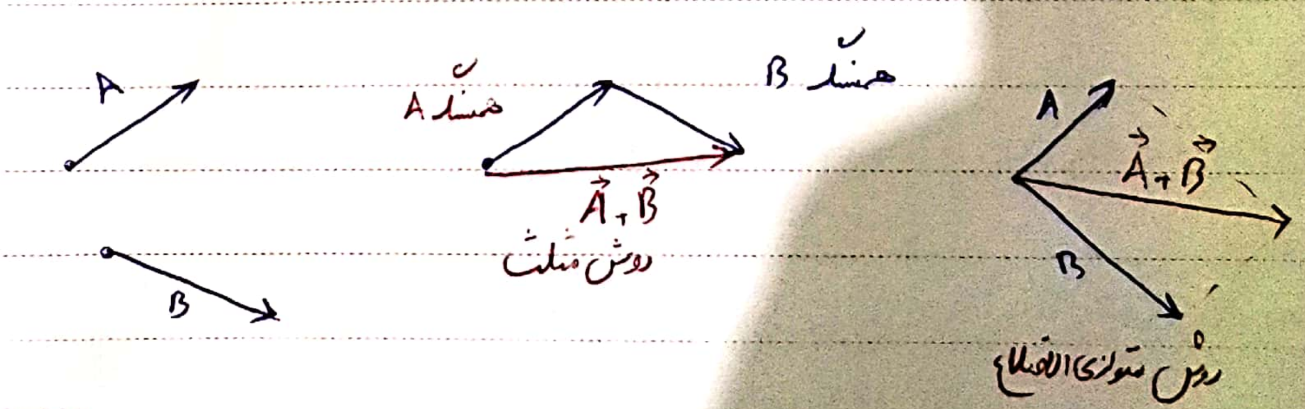
اگر بردار نشد: Div

فشار - دما - زمان ← اسکالر (عدد) هستند

اعمال اصلی بردارها: جمع - تفریق - ضرب داخلی - ضرب خارجی

اعمال اصلی بردار ها به دو شیوه هندسی و تحلیلی انجام می گردد. روش تحلیلی پس از معرفی دستگاه ها آموزش داده خواهد شد که با استفاده از مولفه‌های بردار ها، محاسبه حساب انجام می گردد ولی روش هندسی با خط کش و نقاله قابل انجام است: در روش هندسی داریم:

۱- جمع دو بردار: به روش مثلث یا متوازی الاضلاع قابل انجام است



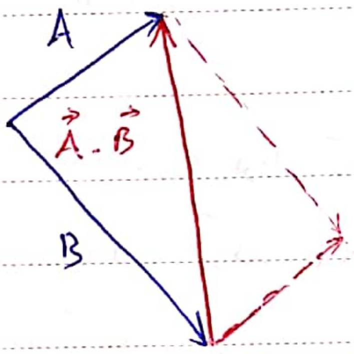
PAPCO

Subject.
Date.

۲- تفریق: عبارت از جمع بردار اول با قرینه بردار دوم است.

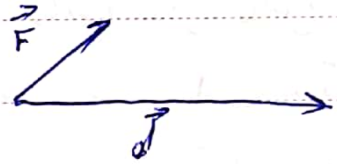
معمولا برای تفریق دو بردار به روش متوازی الاضلاع $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$ عمل می کنیم یعنی قطر فرعی که از نوک B به نوک A رسم می شود

(۲) تست برای درستی رسم بردار تفریق: ۱- A را صفر درنظر بگیریم ۲- B را صفر می کنیم.



۳- ضرب داخلی: وقتی دو بردار با یکدیگر درگیر می شوند و درگیری از جنس ضرب است (یعنی هر کدام را دو برابر کنیم نتیجه دو برابر می شود) و نتیجه درگیری اسکالر است، از ضرب داخلی استفاده می کنیم

مثال: بردار نیرو و جابه جایی که وقتی درگیر می شوند انرژی یا کار بدست می آید.

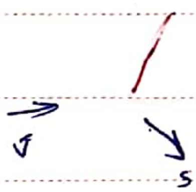


$$W=\vec{F}\cdot\vec{d}=|F|.|d|\cos(\widehat{F,d})$$

$$W=\vec{d}\cdot\vec{F}$$

یا بردار سرعت آب در بردار سطح مقطع نهر که ضرب می شود دبی یا میزان آب دهی برحسب مترمکعب در ثانیه می شود

$$\underset{\text{دبی آب}}{\psi}=\vec{V}\cdot\vec{S}$$



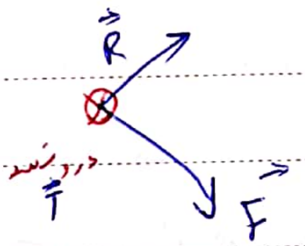
Subject.
Date.

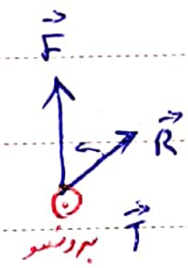
۴- ضرب خارجی: دو بردار با هم درگیر می‌شوند و نتیجه که از جنس ضرب است خود بردار است.

مثل گشتاور $\vec{T} = \vec{R} \times \vec{F} = -\vec{R} \times \vec{F}$ خاصیت ضدجابجایی

اندازه بردار $|\vec{T}| = |\vec{R}| \times |\vec{F}| \cdot \sin(\widehat{\vec{R},\vec{F}})$

نکته مهم: جهت بردار $\vec{T}$ عمود بر هر دو بردار $\vec{R}$ و $\vec{F}$ می‌باشد و در جهت پیچ راست‌گرد حرکت می‌کند که از $\vec{R}$ به سمت $\vec{F}$ چرخانده می‌شود (مثل شیر آب)





دستگاه مختصات:

ابزار ریاضی برای نمایش نقطه در فضا می‌باشد.

۱- هر دستگاه مختصات به تعداد درجات آزادی نقطه در فضای مورد بحث بُعد دارد

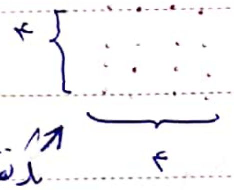
۲- درجات آزادی تعداد حداقل جهاتی است که مورد نیاز می‌باشد تا بتوان از هر نقطه به نقطه دلخواه دیگر رسید.

مثال: در صفحه مسطح با داشتن دو جهت افقی و عمودی میتوان از هر نقطه به هر نقطه دیگر رسید

Subject.

Date.

— در بحث پردازش تصویر هر تصویر ۸×۸ پیکسل یک نقطه در فضای تصویر ۶۴ بعدی است؛ یعنی شدت نور هر پیکسل بصورت مستقل تصویر را عوض می‌کند و نمی‌توان با تغییر نقاط کناری، تغییرات یک نقطه را جبران کرد



یک نقطه در فضای ۱۶ بعدی

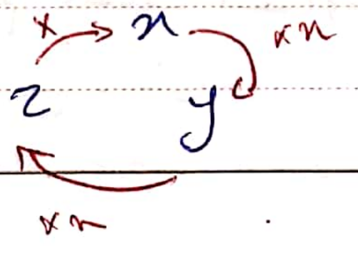
۳- هر دستگاه مختصات به تعداد بعد؛ (ابعاد) یا (مختصه‌ها) بردار پایه دارد. (همان بردار یکه)

بردار پایه طولش واحد است و جهتش بگونه‌ای است که اگر نقطه‌ای را در آن جهت جابه‌جا کنیم، فقط بردار پایه متناظر با آن بردار پایه زیاد می‌شود.

مثلا دستگاه مختصات کارتزین سه‌بعدی پایه سه مختصه x و y و z دارد بردارهای پایه متناظر با این سه مختصه $\hat{a}_x$ ، $\hat{a}_y$ ، $\hat{a}_z$ می‌باشد اگر نقطه‌ای در جهت $\hat{a}_x$ جابه‌جا کرد صرفا مختصه x آن عوض می‌شود ($\hat{a}_x$ همان بردار $\vec{i}$ است و $\hat{a}_y$ همان بردار $\vec{j}$ است و $\hat{a}_z$ همان بردار $\vec{k}$ است.)

۴. اگر بردارهای پایه یک دستگاه دو به دو برهم عمود باشند آن دستگاه متعامد باشد. (اغلب اینگونه است و ما در این درس با این دستگاه‌ها سروکار داریم.) و در غیر اینصورت غیر متعامد است؛ در دستگاه متعامد ترتیب مختصه‌ها را طوری می‌نویسند که دستگاه راست گرد تشکیل گردد مثلا در کارتزین:

[illegible] بردوم ضرب خارجی منفی خواهد شد



$\hat{a}_x \times \hat{a}_y = \hat{a}_z$

$\hat{a}_y \times \hat{a}_z = \hat{a}_x$

$\hat{a}_z \times \hat{a}_x = \hat{a}_y$

$\hat{a}_y \times \hat{a}_x = \hat{a}_z$

۷

* بردارهای پایه همیشه در جهت افزایش مؤلفه خود می‌باشند *

Subject.
Date.

۵- در این درس با سه دستگاه متعامد مطابق جدول زیر سروکار داریم:

دستگاه	u_1	u_2	u_3	$\hat{a}_{u_1}$	$\hat{a}_{u_2}$	$\hat{a}_{u_3}$
	مختصه			بردارهای پایه		
کارتزین	x	y	z	$\hat{a}_x$	$\hat{a}_y$	$\hat{a}_z$
استوانه‌ای	r	ϕ	z	$\hat{a}_r$	$\hat{a}_\phi$	$\hat{a}_z$
کروی	R	θ	ϕ	$\hat{a}_R$	$\hat{a}_\theta$	$\hat{a}_\phi$

(هر وقت بخواهد فرمول یا قاعده‌ای که در مورد سه دستگاه درست است از مختصه‌های دستگاه متعامد عمومی یعنی (u_1 و u_2 و u_3) استفاده می‌کنیم)

۶- نمایش دستگاه‌ها:

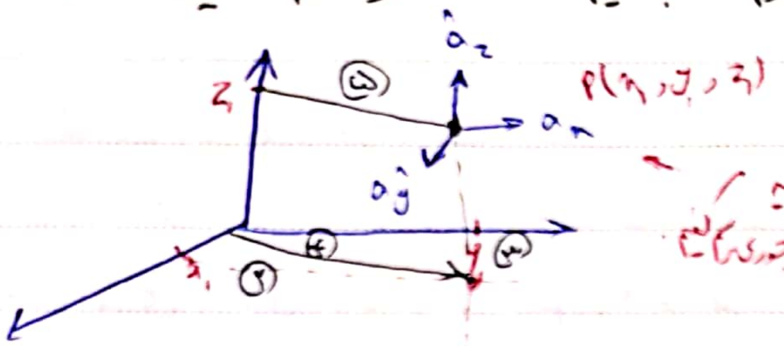
الف) کارتزین: این دستگاه از سه محور عمود بر هم تشکیل شده است و بردارهای پایه آن برای تمام نقاط باهم برابرند و به موازات همین محورها هستند.

اگر بخواهیم مختصات نقطه‌ای را بدست آوردیم باید از آن نقطه بر سه محور عمود کنیم تا پای عمودها که همان مختصه‌ها هستند بدست می‌آید

(در نتیجه و اینست بردارها دیگری را می‌کنیم)

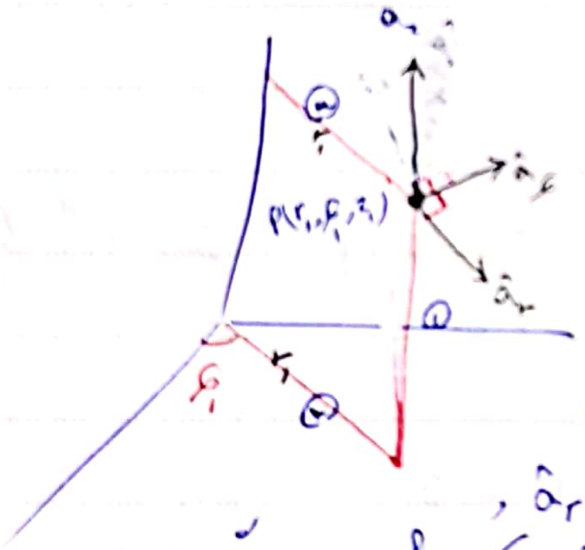
PAPCO

و اگر مختصات را داشته باشیم و بخواهیم نقطه را پیدا کنیم این نقطه حاصل تلاقی سه صفحه می‌باشد.



برای بردار پایه فرقی ندارد چه جوری رسم کنیم

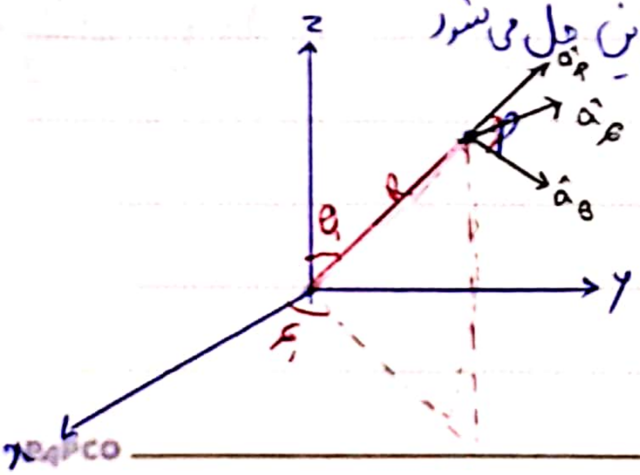
ب) استوانه‌ای: این دستگاه با کمک کارتزین حل می‌شود.



نکته ۱: $\hat{a}_\varphi$ میخواهد نیم صفحه را همچون دری که روی لولا می‌چرخد فشار می‌دهد تا φ زیاد شود

نکته ۲: بردارهای $\hat{a}_x$ و $\hat{a}_y$ و $\hat{a}_z$ برای همه نقاط همسانند ولی بردارهای $\hat{a}_r$ و $\hat{a}_\varphi$ در دو نقطه مختلف معلوم نیست جهتشان یکی باشد پس همسان نیستند

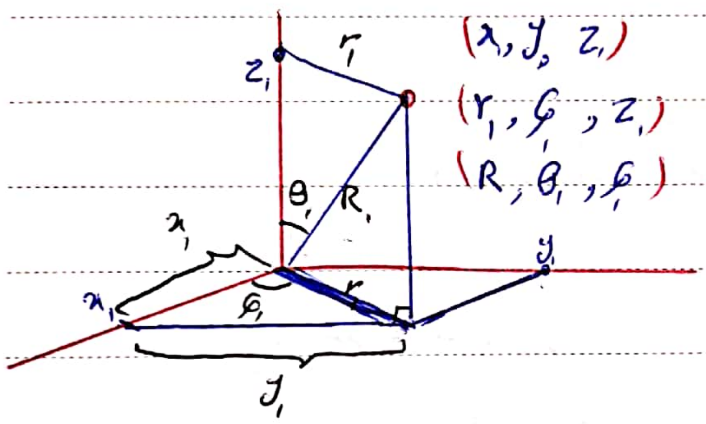
ج) کروی: این دستگاه هم با کمک کارتزین حل می‌شود



Subject.
Date.

تبدیل نقطه از یک دستگاه به یک دستگاه دیگر

با مختصات نقطه‌ای را در دستگاه مبداء میدانیم و میخواهیم این مختصات را در دستگاه دیگر بدست آوریم. برای این منظور کافیست دستگاه کارتزین و استوانه‌ای و کروی را باهم در ذهن تجسم نموده و با استفاده از روابط مثلثاتی، روابط تبدیل را بنویسیم.



① کارتزین $\longrightarrow$ استوانه‌ای $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \varphi = tg^{-1}\dfrac{y}{x}$

(x, y, z) $\quad (r, \varphi, z)$ $\quad z = z$

② استوانه‌ای $\longrightarrow$ کارتزین $\quad x = r\cos\varphi \qquad z = z$

(r, φ, z) $\quad (x, y, z)$ $\quad y = r\sin\varphi$

③ کارتزین $\longrightarrow$ کروی $\quad R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ ,\ \theta = tg^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$

(x, y, z) $\quad (R, \theta, \varphi)$

$\varphi = tg^{-1}\, y/x$

Subject.
Date.

④ کروی ← کارتزین

(R, θ, φ) (x, y, z)

$x = \underbrace{R\sin\theta}_{r} \cdot \cos\varphi$

$y = R\sin\theta\sin\varphi$

$z = R\cos\theta$

⑤ استوانه‌ای ← کروی

(r, φ, z) (R, θ, φ)

$R = \sqrt{r^2 + z^2}$, $\varphi = \varphi$

$\theta = tg^{-1}\frac{r}{z}$

⑥ کروی ← استوانه‌ای

$r = R\sin\theta$, $\varphi = \varphi$, $z = R\cos\theta$

مثال: مختصات نقطه P در کارتزین $(1,2,3)$ است مختصات این نقطه را در استوانه‌ای و کروی حساب کنید

استوانه‌ای: $(r, \varphi, z) = \sqrt{1+4}\,,\ tg^{-1}2\,,\ 3$

کروی: $(R, \theta, \varphi) = (\sqrt{1+4+9}\,,\ tg^{-1}\frac{\sqrt{1+4}}{3}\,,\ tg^{-1}2)$

تمرین: مختصات نقطه P در کروی $(\overset{R}{1}, \overset{\theta}{\frac{\pi}{4}}, \overset{\varphi}{\frac{\pi}{4}})$ است. مختصات را در استوانه‌ای و کارتزین بیابید

استوانه‌ای $r = R\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\varphi = \frac{\pi}{4}$ $z = R\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

کارتزین $x = R\sin\theta\cos\varphi = \frac{\sqrt{4}}{4}$ $z = R\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y = R\sin\theta\sin\varphi = \frac{\sqrt{4}}{4}$

Subject.
Date.

نمایش تحلیلی بردار ها : اگر برداری را برحسب مؤلفه های آن که همان بردار های پایه هستند بیان کنیم ، بردار را به شکل تحلیلی نوشته ایم .

معمولا در دستگاه متعامد عمومی داریم :

$$\vec{A} = A_{u_1}\hat{a}_{u_1} + A_{u_2}\hat{a}_{u_2} + A_{u_3}\hat{a}_{u_3}$$

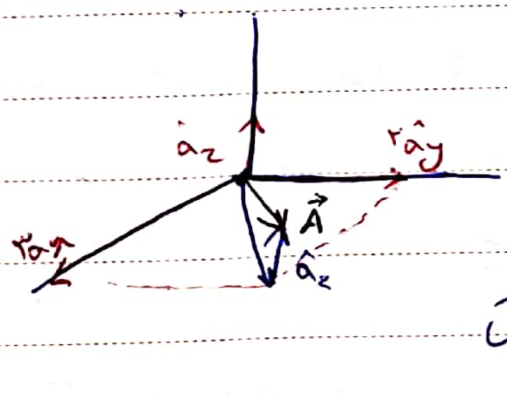
مولفه A در جهت $\hat{a}_{u_1}$

بردار های پایه

مثال : $A = 2\hat{a}_R + 3\hat{a}_\theta + 4\hat{a}_\phi \xrightarrow{\text{توضیح}}$ بردارهای پایه مربوط به نقطه $(1, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$ هستند

نکته مهم : بردار های پایه در دستگاه کارتزین ثابت هستند یعنی مثلا $\hat{a}_x$ تمام نقاط باهم برابراند ولی در استوانه ای و کروی بردار ها چرخش می کنند پس اگر بخواهیم برداری دقیقا مشخص کنیم باید بگوییم که بردارهای پایه مربوط به

مثال : بردار $\vec{A} = 3\hat{a}x + 2\hat{a}y + \hat{a}z$ را رسم کنید



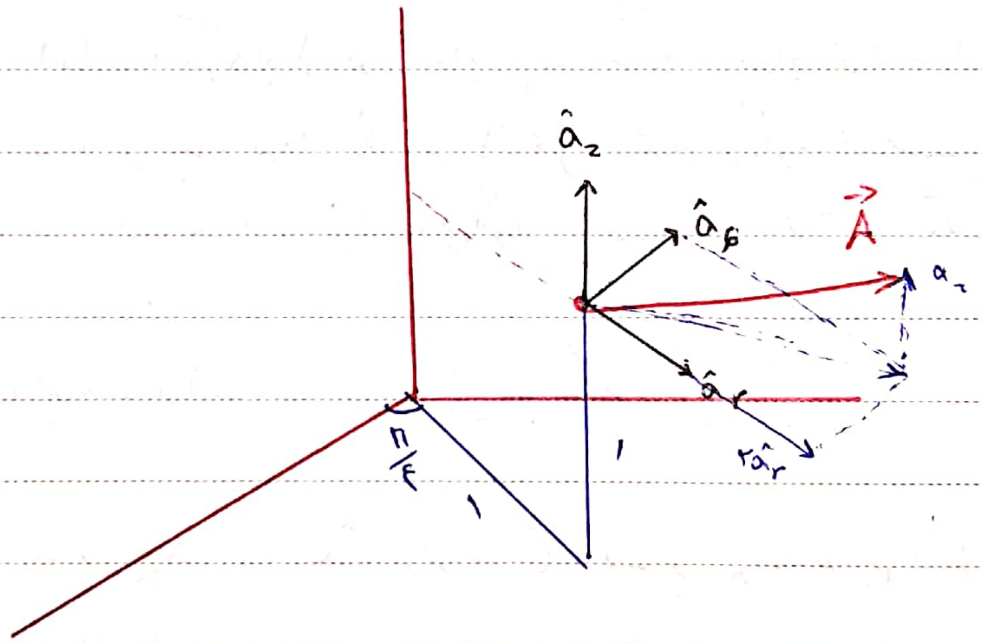
نکته : با توجه به شکل رسم در کارتزین کافیست نقطه ای را مشخص می کنیم که مختصات آن همان مؤلفه های بردار $\vec{A}$ هستند (در این مثال نقطه (۳و۲و۱)) سپس از مبدا مختصات به آن نقطه برداری را رسم کنیم

Subject.
Date.

مثال: رسم بردار در دستگاه استوانه‌ای:

بردار $A = 2\hat{a}_\rho + \hat{a}_\phi + \hat{a}_z$ را که بردارهای پایه آن مربوط به نقطه $(1, \frac{\pi}{4}, 1)$ است را رسم کنید

جواب: در اینجا باید ابتدا در نقطه $(1, \frac{\pi}{4}, 1)$ بردارهای پایه را رسم کنیم و سپس آن‌ها را امتداد دهیم تا سه محور ساخته شود. بعد روی این سه محور همان کاری را انجام می‌دهیم که در مثال قبل انجام دادیم



Subject.
Date.

تبدیل بردار از یک دستگاه به دستگاه دیگر:

میخواهیم یک بردار که مثلا در دستگاه کروی بصورت $\vec{A} = A_R \hat{a}_R + A_\theta \hat{a}_\theta + A_\phi \hat{a}_\phi$ نوشته شده است را به دستگاه کارتزین ببریم تا بصورت

$$\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$$

درآید. دقت کنید که هرکدام از مولفه‌ها در دستگاه مبدا (مثلا $2\hat{a}_R$) وقتی به دستگاه مقصد می‌رسد خود سه مولفه خواهد داشت

$$\left(2\hat{a}_R = 2\left(\underset{\text{تصویر } \hat{a}_R \text{ بر روی } \hat{a}_x}{?}\hat{a}_x + \underset{\text{تصویر } \hat{a}_R \text{ بر روی } \hat{a}_y}{?}\hat{a}_y + \underset{\text{تصویر } \hat{a}_R \text{ بر روی } \hat{a}_z}{?}\hat{a}_z\right)\right)$$

یعنی ابتدا باید هرکدام از بردارهای پایه دستگاه مبدا، به سه مولفه در دستگاه مقصد تجزیه گردد (پس بردار $\vec{A}$ به ۹ بخش تجزیه می‌گردد) سپس مولفه‌های متناظر دوباره باهم ترکیب می‌شوند و سه مولفه دستگاه مقصد ساخته خواهد شد.

برای تجزیه و ترکیب بردارهای پایه به نکات زیر توجه کنید:

۱. تصویر $\hat{a}_R$ بر $\hat{a}_x$ برابر است با تصویر $\hat{a}_x$ بر $\hat{a}_R$ (چون هر دو طولشان واحد است و تصویر یعنی طول در کسینوس زاویه بین) و برابر است با کسینوس زاویه بین آن دو

۲. ضرب داخلی دو بردار پایه برابر است با کسینوس زاویه بین آنها (چون طول هر دو واحد است)

Subject.
Date.

۳- برای بدست آوردن تبدیل بردار ها کافیست جدول حاصلضرب داخلی بردارهای پایه را بدانیم (یعنی کسینوس زاویه بین آنها را بدانیم)

الف) تبدیل از کارتزین به استوانه‌ای و برعکس:

$\cdot$	$\hat{a}_r$	$\hat{a}_\varphi$	$\hat{a}_z$
$\hat{a}_x$	$\cos\varphi$	$\cos(\varphi+\frac{\pi}{2}) = -\sin\varphi$	0
$\hat{a}_y$	$\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi) = \sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\hat{a}_z$	0	0	1

مثال: بردار $\vec{A} = 2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y + 4\hat{a}_z$ را در دستگاه استوانه‌ای برحسب بردارهای پایه نقطه $(2, \frac{\pi}{6}, 1)$ بنویسید.

$$\vec{A} = 2(\underbrace{\cos\varphi}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\,\hat{a}_r - \underbrace{\sin\varphi}_{-\frac{1}{2}}\,\hat{a}_\varphi + 0\,\hat{a}_z) + \dots$$

$$+\,3(\underbrace{\sin\varphi}_{\frac{1}{2}}\,\hat{a}_r + \underbrace{\cos\varphi}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\,\hat{a}_\varphi + 0\,\hat{a}_z) + 4(0\,\hat{a}_r + 0\,\hat{a}_\varphi + \hat{a}_z)$$

$$\vec{A} = (\sqrt{3}\,\hat{a}_r - \hat{a}_\varphi) + (\frac{3}{2}\,\hat{a}_r + 1{,}5\sqrt{3}\,\hat{a}_\varphi) + 4\,\hat{a}_z$$

$$\Rightarrow \vec{A} = (\sqrt{3} + \frac{3}{2})\,\hat{a}_r + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{a}_\varphi + 4\,\hat{a}_z$$

Subject.
Date.

مثال ۲: بردار $\vec{B} = 3\hat{a}_r - \hat{a}_\phi + \hat{a}_z$ را در کارتزین بنویسید. بردار پایه استوانه ای مربوط به نقطه (۲، $\frac{\pi}{4}$، ۱) است.

$$\vec{B} = 3(\underbrace{\overbrace{\cos\phi}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\,\hat{a}_x + \overbrace{\sin\phi}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\,\hat{a}_y + 0}_{\text{ستون اول}}) - (-\sin\phi\,\hat{a}_x + \cos\phi\,\hat{a}_y + 0)$$

$$+(0 + 0 + \hat{a}_z) = 2\sqrt{2}\,\hat{a}_x + \sqrt{2}\,\hat{a}_y + \hat{a}_z$$

ب) تبدیل از استوانه‌ای به کروی و برعکس:

.	$\hat{a}_R$	$\hat{a}_\theta$	$\hat{a}_\phi$
$\hat{a}_r$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ $\sin\theta$	$\cos\theta$	0
$\hat{a}_\phi$	0	0	1
$\hat{a}_z$	$\cos\theta$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)$ $-\sin\theta$	0

هر دو ضلع زاویه θ را $\frac{\pi}{2}$ چرخاندیم

مثال: بردار $\vec{A} = 2\hat{a}_r + 3\hat{a}_\phi + \hat{a}_z$ را در کروی بنویسید $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، $\phi = \frac{\pi}{2}$

$$\vec{A} = 2(\sin\theta\,\hat{a}_R + \cos\theta\,\hat{a}_\theta) + 3\hat{a}_\phi + (\cos\theta\,\hat{a}_R - \sin\theta\,\hat{a}_\theta)$$

$$= (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})\hat{a}_R + (\sqrt{2} - \frac{1}{2})\hat{a}_\theta + 3\hat{a}_\phi$$

حال تصویر را بر محور x تصویر می‌کنیم یعنی در $\cos\phi$ ضرب می‌شود

ابتدا $\hat{a}_R$ را به صفحه xoy تصویر می‌کنیم که طول آن $\sin\theta$ می‌شود

ج) تبدیل از کروی به کارتزین و برعکس

·	$\hat{a}_R$	$\hat{a}_\theta$	$\hat{a}_\phi$
$\hat{a}_x$	$\sin\theta \cdot \cos\phi$	$\cos\theta \cdot \cos\phi$	$-\sin\phi$
$\hat{a}_y$	$\sin\theta \cdot \sin\phi$	$\cos\theta \cdot \sin\phi$	$\cos\phi$
$\hat{a}_z$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	0

تصویر $\hat{a}_\theta$ بر صفحه xoy یعنی $\hat{a}_r$

در جدول دوم مشخص کرده بودیم

در جدول اول مشخص کرده بودیم

تمرین: بردار $\vec{A} = 3\hat{a}_R + 4\hat{a}_\theta + 5\hat{a}_\phi$ را در استوانه‌ای و کارتزین بنویسید ($\phi = \frac{\pi}{4}$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$)

میدان برداری: تابع‌ای است که دامنه آن مختصات فضا و برد آن بردار است

$x \rightarrow \boxed{f(x)} \rightarrow y$

y و $f(x)$ تابع ساده

مختصات فضا $(u_1, u_2, u_3) \rightarrow \boxed{\vec{F}(u_1, u_2, u_3)} \rightarrow$ بردار $\vec{F}$

به عنوان مثال حرکت هوا یا باد را می‌توان با میدان برداری سرعت هوا بیان کرد $\vec{V}(x, y, z)$ یا میدان جاذبه زمین را می‌توان با $\vec{g}(R, \theta, \phi)$ بیان کرد که البته در اینجا فقط به R یعنی فاصله از مرکز زمین رابطه دارد.

Subject.
Date.

درحالت کلی میتوان میدان برداری را به حسب سه مؤلفه آن نوشت

$$\vec{F}(u_1, u_2, u_3) = \underbrace{F_{u_1}}_{\text{مولفه } u_1 \text{ از میدان}}(u_1, u_2, u_3) \cdot \underbrace{\hat{a}_{u_1}}_{\text{بردار پایه } u_1} + F_{u_2}(\ ) \cdot \hat{a}_{u_2} + F_{u_3}(\ ) \cdot \hat{a}_{u_3}$$

درحالت کلی خود توابع اسکالر سه متغیره هستند $F_{u_1}()$ و $F_{u_2}()$ و $F_{u_3}()$

وقتی

وقتی میدان برداری مینویسیم ممکن است بعضی مولفه‌ها صفر باشند یا در بعضی از مؤلفه‌ها بعضی از متغیرها را نداشته باشیم مثال های زیر میدان برداری هستند:

$$\vec{F}(x,y,z) = x^2yz\ \hat{a}_x + 3\hat{a}_y + 2x\ \hat{a}_z$$

$$\vec{g}(R,\theta,\phi) = -9.8\ \hat{a}_R \rightarrow \text{جاذبه زمین}$$

$$\vec{T}(r,\phi,z) = 4\hat{a}_r + 2\hat{a}_z$$

Subject.

Date.

تبدیل میدانهای برداری: باید هم مختصه ها و هم بردارهای پایه تبدیل گردند (در اینجا لازم نیست بگوییم بردارهای پایه مربوط به چه نقطه ای اند بردارها مربوط به همان نقطه ای اند که میدان آن نوشته می شود.)

مثال: میدان برداری مقابل را در کروی بنویسید. $\vec{F}(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\hat{a}_x+\dots$
$\dots+y\,\hat{a}_y$

جواب: باید میدان را طوری بنویسیم که فقط برحسب R، θ و ϕ باشد بس داریم

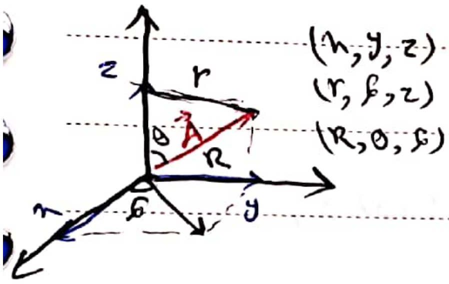
$$\vec{F}(R,\theta,\phi)=R^2(\sin\theta\cos\phi\,\hat{a}_R+\cos\theta\cos\phi\,\hat{a}_\theta-\sin\phi\,\hat{a}_\phi$$
$$+R\sin\theta\sin\phi(\sin\theta\sin\phi\,\hat{a}_R+\cos\theta\sin\phi\,\hat{a}_\theta+\cos\phi\,\hat{a}_\phi)$$
$$=(R^2\sin\theta\sin\phi+R\sin^2\theta\sin^2\phi)\hat{a}_R+(R^2\cos\theta\cos\phi+R\sin\theta\cos\theta$$
$$\sin^2\phi)\hat{a}_\theta+(-R^2\sin\phi+R\sin\theta\sin\phi\cos\phi)\hat{a}_\phi$$

مثال (۲) مهم: میدان برداری $\vec{A}(u_1,u_2,u_3)$ در هر نقطه برابر با بردار مکان آن نقطه است (یعنی برداری که از مبدا مختصات به آن نقطه وصل می گردد)

اولاً) این میدان برداری را مستقیماً در هر یک از دستگاه ها بنویسید.

ثانیاً) نشان دهید که تبدیل میدان در حالت استوانه ای به کارتزین همان چیزی میشود که قبل نوشته ایم.

Subject.
Date.



$\vec{A}(x, y, z) = x\,\hat{a}_x + y\,\hat{a}_y + z\,\hat{a}_z$

$\vec{A}(r, \varphi, z) = z\,\hat{a}_z + r\,\hat{a}_r$

$\vec{A}(R, \theta, \varphi) = R\,\hat{a}_R$

سوال: بردار مکان $(2, \frac{\pi}{4}, 1)$ و $(1, \frac{\pi}{4}, 2)$ هر دو $\vec{A}(r, \varphi, z) = 1\hat{a}_r + 2\hat{a}_z$ میشود. آیا بردار مکان این دو نقطه همسانند؟

جواب: خیر زیرا وقتی φ عوض می‌شود جهت $\hat{a}_r$ عوض می‌شود پس $\hat{a}_r$ این دو نقطه با هم برابر نیست.

ثانیاً) باید میدان برداری در حالت استوانه‌ای به کارتزین تبدیل نماییم.

$\vec{A}(r, \varphi, z) = r\,\hat{a}_r + z\,\hat{a}_z$

$\Rightarrow \vec{A}(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2}\,(\hat{a}_x \cos\varphi + \hat{a}_y \sin\varphi) + z\,\hat{a}_z$

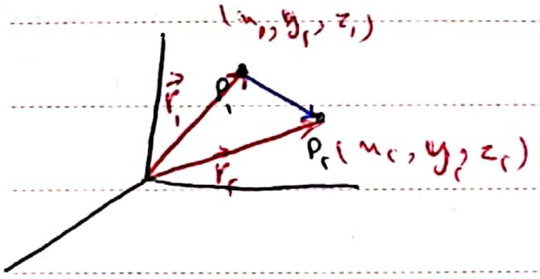
کار تمام نشده است چون φ هم باید به کارتزین برود. اگر بنویسیم $\varphi = tg^{-1} \frac{y}{x}$ کار خود را سخت کرده‌ام بهتر است بنویسیم $\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ و $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ در اینصورت:

$A(x, y, z) = \cancel{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\hat{a}_x \frac{x}{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}} + \hat{a}_y \frac{y}{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}}\right) + z\,\hat{a}_z$

$\vec{A}(x, y, z) = x\,\hat{a}_x + y\,\hat{a}_y + z\,\hat{a}_z$

Subject.
Date.

مثال ۲) دو نقطه دلخواه $P_1(x_1, y_1, z_1)$ و $P_2(x_2, y_2, z_2)$ را درنظر گرفته و اولاً بردار واصل از نقطه P_1 به نقطه P_2 را نوشته و ثانیاً طول آن را حساب کنید.



کافیست بردار مکان این دو نقطه را از هم کم کنیم

$$\vec{R} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$
$$= (x_2 \hat{a}_x + y_2 \hat{a}_y + z_2 \hat{a}_z) - (x_1 \hat{a}_x + y_1 \hat{a}_y + z_1 \hat{a}_z)$$
$$= (x_2 - x_1)\hat{a}_x + (y_2 - y_1)\hat{a}_y + (z_2 - z_1)\hat{a}_z$$

$$|R| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

سوال: آیا میتوان با همین شیوه در استوانه‌ای یا کروی عمل کرد؟

جواب: خیر زیرا مثلا در کروی باید بنویسیم: $R_2 \hat{a}_R - R_1 \hat{a}_R$
$= (R_2 - R_1)\hat{a}_R$

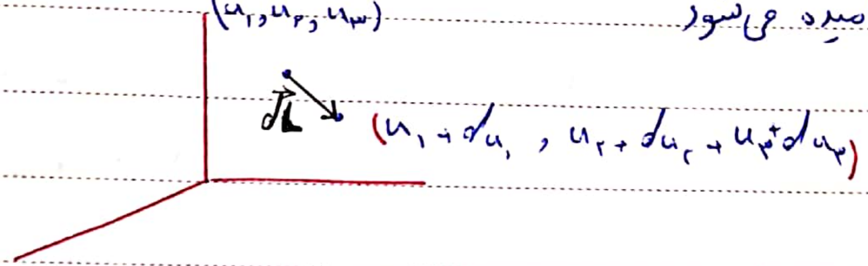
که اینکار غلط است زیرا $\hat{a}_R$ دو نقطه همسنگ نبوده است تا بتوان از آن فاکتور گرفت.

پس غالباً بردار واصل را در کارتزین می‌نویسیم

Subject.
Date.

بردار نمو جابجایی

اگر در دستگاه متعامد عمومی مختصات نقطه‌ای را با دیفرانسیل هر یک از مختصه‌ها جمع کنیم نقطه جدیدی بدست می‌آید. بردار واصل از نقطه اولیه به نقطه جدید بردار نمو جابجایی نامیده می‌شود



در شکل فوق بردار $\vec{dl}$ بردار نمو جابجایی نامیده می‌شود. این بردار مبنای مشتق گیری و انتگرال گیری در میدانهای برداری است. از آنجا که همه مختصه‌ها از جنس طول نیستند، اگر بخواهیم بردار $\vec{dl}$ برحسب مؤلفه‌هایش بنویسیم باید از ضرایب متریک استفاده کنیم. ضرایب متریک نمو مختصه را به نمو جابجایی متناظر با آن مختصه تبدیل می‌کند یعنی در حالت کلی

نمو مختصه‌ها

$$\vec{dl} = h_1\, du_1\, \hat{a}_{u_1} + h_2\, du_2\, \hat{a}_{u_2} + h_3\, du_3\, \hat{a}_{u_3}$$

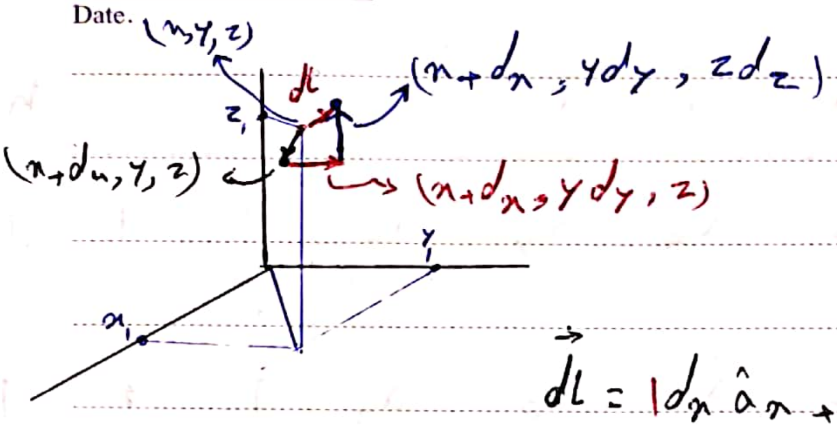
ضرایب متریک

برای تعیین ضرایب متریک کافیست هر یک از دستگاه‌های مختصات را مجسم نموده و مؤلفه $\vec{dl}$ را تعیین می‌کنیم.

* زاویه بُعد ندارد

Subject.
Date.

الف) کارتزین

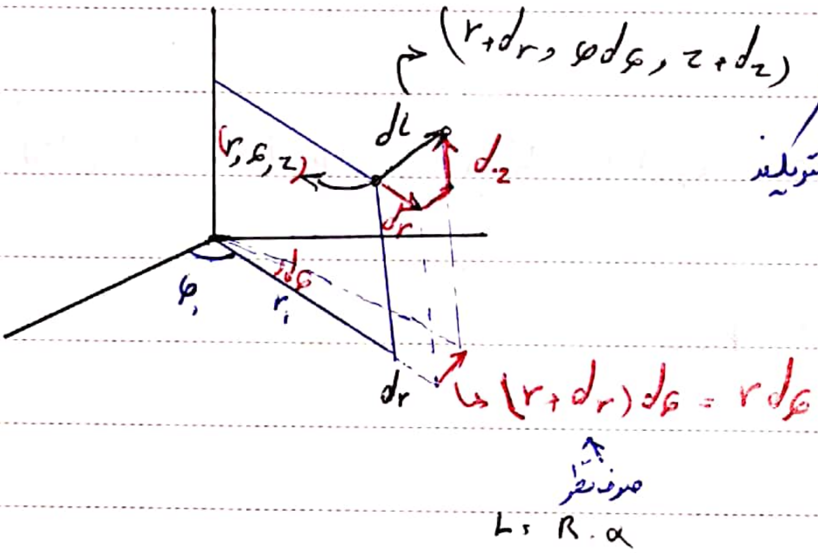


$$\vec{dL} = 1d_x\,\hat{a}_x + 1d_y\,\hat{a}_y + 1d_z\,\hat{a}_z$$

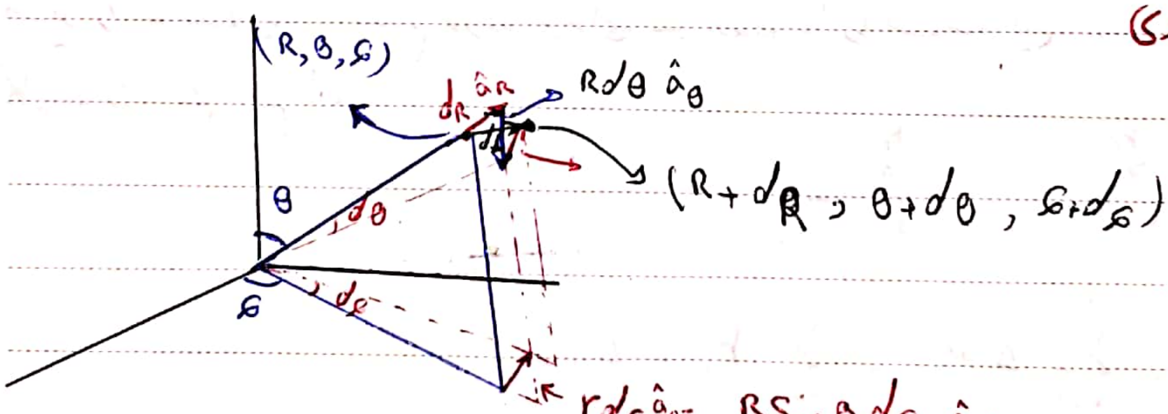
ضرایب ترکیب در کارتزین (1,1,1) هستند

ب) استوانه‌ای

(1, r, 1) ضرایب متریک‌اند



ج) کروی

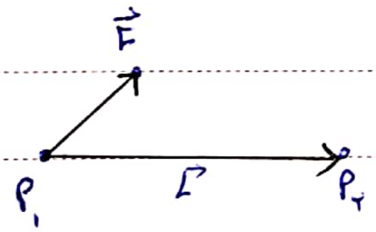


$$\vec{dL} = 1\,dR\,\hat{a}_R + R\,d\theta\,\hat{a}_\theta + R\sin\theta\, d\varphi\,\hat{a}_\varphi$$

ضرایب متریک

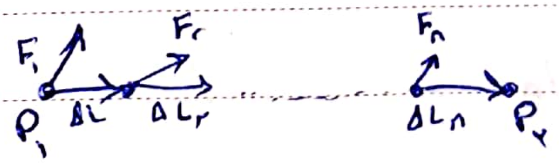
دستگاه	u_1	u_2	u_3	a_{u_1}	a_{u_2}	a_{u_3}	h_1	h_2	h_3
کارتزین	x	y	z	$\hat{a}_x$	$\hat{a}_y$	$\hat{a}_z$	1	1	1
استوانه ای	r	ϕ	z	$\hat{a}_r$	$\hat{a}_\phi$	$\hat{a}_z$	1	r	1
کروی	R	θ	ϕ	$\hat{a}_R$	$\hat{a}_\theta$	$\hat{a}_\phi$	1	R	$R\sin\theta$

انتگرال خطی : قبلا برای محاسبه کار یا انرژی مصرف شده دیدیم



$$W = \vec{F} \cdot \vec{L}$$

اگر در طول جابه جایی، نیرو عوض شود یا مسیر مستقیم الخط نباشد مجبوریم مسیر را به قطعات تقسیم نموده و برای هر قطعه کار را حساب کنیم و در نهایت کار ها را با هم جمع کنیم



$$W = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{\Delta L}_i$$

Subject.
Date.

در حد، زمانیکه تغییرات نیرو زیاد باشد میتوان تعداد قطعات را بسیار زیاد کرد $n \to \infty$ و طول قطعات را بسیار کوچک کرد $\vec{\Delta l} \to 0$ و بدین ترتیب **انتگرال خطی** ظاهر می‌شود که مهمترین کاربرد آن محاسبه انرژی حاصل از جابه جایی در میدان برداری $\vec{F}(\,)$ است.

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}(\,) \cdot \vec{dl}$$

روش محاسبه انتگرال خطی:

اولاً) با توجه به مسیر انتگرال‌گیری باید دستگاهی را انتخاب کنیم که معادله مسیر به سادگی نوشته شود

ثانیاً) در دستگاه فوق $\vec{F}(\,)$ را برحسب مؤلفه‌ها بسط می‌دهیم، ضمناً بسط $\vec{dl}$ را هم با استفاده از فرایند متریک می‌نویسیم

ثالثاً) از ضرب نقطه‌ای $\vec{F}(\,)$ در بردار $\vec{dl}$ در انتگرال اسکالر ساخته می‌شود که باید جداگانه محاسبه گردد؛ داریم:

ضرب نقطه‌ای $= 1$

تعامد یکه (u_1, u_2, u_3)

$$W = \int \left[F_{u_1}(\,)\hat{a}_{u_1} + F_{u_2}(\,)\hat{a}_{u_2} + F_{u_3}(\,)\hat{a}_{u_3} \right] \cdot \left[h_1 du_1\, \hat{a}_{u_1} + h_2 du_2\, \hat{a}_{u_2} + h_3 du_3\, \hat{a}_{u_3} \right]$$

تعامد (u_1, u_2, u_3)

$= 0$

ضرب نقطه‌ای $= 0$

$tg^{-1}\frac{y}{x} = tg^{-1}\frac{۲}{\infty} = \frac{\pi}{۲}$

Subject.
Date.

از ضرب تطیر به تظیر و حذف جملات صفر داریم:

$$w = \int_{u_1}^{u_1'} F_{u_1}(u_1, u_2, u_3) h_1 du_1 + \int_{u_2}^{u_2'} F_{u_2}(u_1, u_2, u_3) h_2 du_2 + \dots$$

$$\dots + \int_{u_3}^{u_3'} F_{u_3}(u_1, u_2, u_3) h_3 du_3$$

همانطور که دیده می‌شود باید سه انتگرال اسکالر محاسبه گردد. توجه کنید در هر کدام از انتگرال‌ها به ظاهر باید از یک تابع سه متغیره انتگرال یک متغیره گرفت برای رفع این مشکل توجه کنید که در هریک از این انتگرال‌ها متغیر دوم و سوم با توجه به معادله مسیر برحسب متغیر انتگرال نوشته می‌شوند.

مثال: میدان برداری $\vec{F}(x,y,z) = x^2\hat{a}_x + xyz\hat{a}_y + ۳\hat{a}_z$ مفروض است انتگرال خطی آن را از مبدا مختصات تا نقطه (۱,۲,۳) در مسیر مستقیم حساب کنید

$$w = \int_{۰,۰,۰}^{۱,۲,۳} \vec{F}\cdot\vec{dL} =$$

$$= \int (x^2\hat{a}_x + xyz\hat{a}_y + ۳\hat{a}_z)\cdot(d_x\hat{a}_x + d_y\hat{a}_y + d_z\hat{a}_z)$$

$$= \int_{x=۰}^{۱} x^2 d_x + \int_{y=۰}^{۲} xyz\, dy + \int_{۰}^{۳} ۳ d_z$$

$$= \frac{x^3}{۳}\Big|_۰^۱ + \qquad + ۳z\Big|_۰^۳$$

$\frac{۱}{۳}$ $\qquad$ ۹

Subject.
Date.

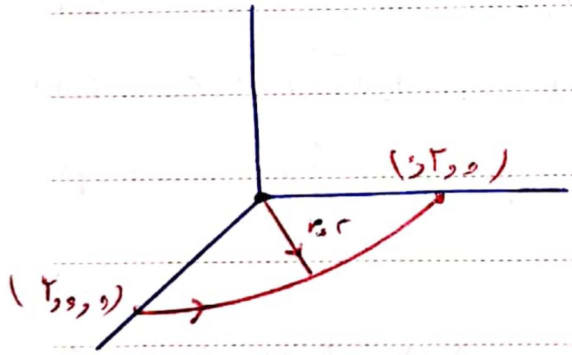
در انتگرال دوم باید x و z با توجه به معادله مسیر برحسب y نوشته شود

معادله مسیر
$$\frac{x-x_1}{\underset{1\quad 0}{x_2-x_1}} = \frac{y-y_1}{\underset{2\quad 0}{y_2-y_1}} = \frac{z-z_1}{\underset{3\quad 0}{z_2-z_1}} \Rightarrow x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

انتگرال دوم
$$= \int_{y=0}^{2} \frac{y}{2}\cdot y \cdot \frac{3}{2} y \, dy = \frac{3}{4}\int_{0}^{2} y^3\, dy = \frac{3}{16} y^4 \Big|_0^2$$

$$= 3 \qquad \Rightarrow W = \frac{1}{3} + 3 + 9 = \frac{37}{3}$$

مثال ۲ میدان برداری $\vec{F}(x,y,z) = y\hat{a}_x + x\hat{a}_y$ مفروض است انتگرال خطی آن را در مسیر ربع دایره نشان داده شده در شکل به دست آورید



جواب با توجه به آنکه مسیر دایروی است حل انتگرال در دستگاه استوانه‌ای ساده‌تر است.
ابتدا میدان را تبدیل می‌کنیم.

$$F(r,\varphi,z) = r\sin\varphi\,(\hat{a}_r\cos\varphi - \hat{a}_\varphi\sin\varphi) +$$
$$+\, r\cos\varphi\,(\hat{a}_r\sin\varphi + \hat{a}_\varphi\cos\varphi)$$
$$= r\sin 2\varphi\,\hat{a}_r + r(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,\hat{a}_\varphi$$
$$= r(\sin 2\varphi\,\hat{a}_r + \cos 2\varphi\,\hat{a}_\varphi)$$

نقطه شروع $(2,0,0) \rightarrow (2,0,0)$

نقطه پایان $(0,2,0) \rightarrow (2,\frac{\pi}{2},0)$

معادله مسیر $\begin{cases} z=0 \\ r=2 \end{cases}$

Subject.
Date.

$$w = \int_{(2,0,0)}^{(2,\frac{\pi}{2},0)} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int (r\sin 2\varphi\, \hat{a}_r + r\cos 2\varphi\, \hat{a}_\varphi)\cdot$$

$$(dr\,\hat{a}_r + r\,d\varphi\,\hat{a}_\varphi + dz\,\hat{a}_z)$$

$$= \int_2^2 r\sin 2\varphi\, dr + \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos 2\varphi\, d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi\, d\varphi$$

با توجه به معادله مسیر $= 4$

$$\frac{4}{2}\sin 2\varphi \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

نکته: وقتی می‌خواهیم معادله مسیر بنویسیم باید دو رابطه بین مختصه‌ها بنویسیم. در واقع با نوشتن هر رابطه یک درجه آزادی از نقطه گرفته می‌شود، نقطه در فضا آزاد سه بعدی دارای سه درجه آزادی است. با نوشتن یک رابطه به دو درجه آزادی می‌رسیم (یعنی صفحه) با نوشتن دو رابطه به یک درجه آزادی می‌رسیم یعنی خط

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

تمرین: همان مثال را در حالت $F_{(r)} = x\hat{a}_x$ حل کنید ← نتیجه انتگرال باید منفی بشود!

تمرین ۲: $\frac{1}{8}$ دایره حل کنید یعنی از $\varphi = 0$ تا $\varphi = \frac{\pi}{2}$

نتیجه انتگرال باید مثبت بشود!

PAPCO

[illegible] یک سال

انتگرال سطحی: مهم‌ترین کاربرد این انتگرال محاسبه شار یا فلوی باشد که در آن میدان برداری $\vec{F}(u_1, u_2, u_3)$ در دیفرانسیل سطح $\vec{ds}$ ضرب می‌گردد.

برای مثال اگر بخواهیم دبی یا میزان آب‌دهی نهر را حساب کنیم باید میدان سرعت آب $\vec{u}(x, y, z)$ را در دیفرانسیل سطح ورودی محدوده سطح مقطع انتگرال بگیریم

$$\iint_{\text{محدوده}} \vec{u} \cdot \vec{ds} = \text{دبی آب}$$

روش محاسبه انتگرال سطحی:

کافیست: ۱- میدان را برحسب مولفه‌های آن بنویسیم

۲- بردار $\vec{ds}$ را برحسب مولفه‌های آن بنویسیم. مولفه‌های $\vec{ds}$ از ضرب خارجی دو به دوی مولفه‌های $\vec{dl}$ بدست می‌آید.

$$\vec{dl} = h_1 du_1 \hat{a}_{u_1} + h_2 du_2 \hat{a}_{u_2} + h_3 du_3 \hat{a}_{u_3}$$

$$\vec{ds}_1 = R\, dR\, d\phi\, \hat{a}_\phi \xleftarrow{\text{کروی}} \vec{ds}_1 = h_1 h_2 du_1 du_2 (\hat{a}_{u_1} \times \hat{a}_{u_2}) = h_1 h_2 du_1 du_2 \underbrace{\hat{a}_{u_3}}$$

$$\vec{ds}_2 = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{a}_R \qquad \vec{ds}_2 = h_2 h_3 du_2 du_3 \hat{a}_{u_1}$$

$$\vec{ds}_3 = R \sin\theta\, d\phi\, dR\, \hat{a}_\theta \qquad \vec{ds}_3 = h_3 h_1 du_3 du_1 \hat{a}_{u_2}$$

کارتزین

$$ds_1 = dx\, dy\, \hat{a}_z$$
$$ds_2 = dy\, dz\, \hat{a}_x$$
$$ds_3 = dx\, dz\, \hat{a}_y$$

Subject.
Date.

۳- از ضرب میدان برداری $\vec{F}(\;)$ در بردار $d\vec{s}$ به انتگرال اسکالر دوگانه حاصل می‌شود.

$$\Psi = \iint \left[F_{u_1}(u_1, u_2, u_3)\,\hat{a}_{u_1} + F_{u_2}(\;)\,\hat{a}_{u_2} + F_{u_3}(\;)\,\hat{a}_{u_3} \right] \cdot$$

ضرب نقطه‌ای

$$(h_1 h_3\, du_1\, du_3\, \hat{a}_{u_2} + h_2 h_3\, du_2\, du_3\, \hat{a}_{u_1} + h_3 h_1\, du_3\, du_1\, \hat{a}_{u_2})$$

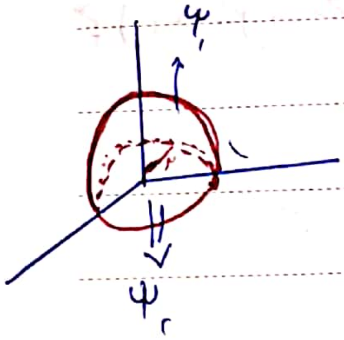
$$\Psi = \int_{u_3}^{u_3'}\int_{u_2}^{u_2'} F_{u_1}(\;) h_2 h_3\, du_2\, du_3 + \int_{u_3}^{u_3'}\int_{u_1}^{u_1'} F_{u_2}(\;) h_3 h_1\, du_3\, du_1$$

$$+ \int_{u_2}^{u_2'}\int_{u_1}^{u_1'} F_{u_3}(\;) h_2 h_1\, du_2\, du_1$$

توجه کنید: همچون انتگرال خطی در اینجا انتگرال اول برحسب u_2 و u_3 است در صورتیکه $F_{u_1}(u_1, u_2, u_3)$ تابع سه متغیره است در اینجا باید u_1 را با توجه به معادله سطح مقطع برحسب u_2 و u_3 بنویسیم.

Subject.
Date.

مثال: میدان برداری $\vec{F}(R,\theta,\phi) = R^2 \hat{a}_R + R\sin\theta\, \hat{a}_\theta$ مفروض است شاری که از سطح بالایی و قاعده نیمکره نشان داده شده در شکل خارج می‌شود را محاسبه کنید.



جواب: معادله‌ای برای پوسته بالایی نوشته می‌شود
و معادله‌ای که برای سطح قاعده نوشته می‌شود فرق دارد
پس شارها جداگانه حساب می‌شود

معادله پوسته بالایی: $R = 2$

حدود متغیرها در انتگرال: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$0 < \phi < 2\pi$

$$\psi_1 = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$d\vec{s} = 0 + R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{a}_R + 0$$

در کل پوسته R ثابت است پس $dR = 0$ در مولفه دیگر هم صفر می‌شود.

$$\psi_1 = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \, \underbrace{\hat{a}_R \cdot R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{a}_R}_{=1}$$

$$= \iint R^4 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 16 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta = 32\pi$$

Subject.
Date. $0<R<2$

محاسبه ψ_2. معادله رویه $\theta = \frac{\pi}{2}$ حدود تغییرات $\Big\}$ $0<\phi<2\pi$

چون در این سطح θ ثابت است پس $d\theta = 0$ پس:

$$\vec{ds} = R\sin\theta\, dR\, d\phi\ \hat{a}_\theta + 0 + 0$$

$\sin\theta = 1$ زیرا $\theta = \frac{\pi}{2}$ معادله رویه

$$\psi_2 = \int_0^2 \int_0^{2\pi} R\sin\theta\ \underbrace{\hat{a}_\theta \cdot R\sin\theta\, d\phi\, dR\ \hat{a}_\theta}_{a \cdot a = 1}$$

$$\int_0^2 R^2\, dR \times \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{16\pi}{3}$$

$$\psi_T = \psi_1 + \psi_2 = \frac{16\pi}{3} + 32\pi$$

Subject.
Date.

مشتق گیری در میدان های برداری :

① گرادیان (شیب)
② دیورژانس (پخش)
③ کرل (پیچش)

① گرادیان: عملگر گرادیان ابزاری است که بر روی یک تابع اسکالر مثل $f(x_1,x_2,x_3)$ عمل می کند و یک میدان برداری میدهد گرادیان با نماد ∇f نشان داده می شود. این میدان برداری به ازای هر نقطه از مختصات یک بردار می دهد. جهت این بردار بیانگر جهتی است که اگر مختصات نقطه در آن جهت جابجا گردد تابع f بیشترین تغییرات را خواهد داشت و اندازه بردار بیانگر نرخ تغییرات در آن جهت می باشد.

مثال: اگر در یک اتاق در زمستان پنجره سرد و شوفاژ در دو سمت مقابل باشد گرادیان دما خطوط برداری به شکل ذیل خواهد داشت

$T(x,y,z)$
دما هر نقطه

رابطه ریاضی گرادیان: گرادیان بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\vec{\nabla} f_{(\,)} = \frac{\partial f}{\partial n}\hat{a}_n$$

توضیح: قبلا $\vec{dL}$ را به عنوان بردار تغییر جابجایی تعریف کرده‌ایم. در هر نقطه $\vec{dL}$ میتواند بی نهایت جهت داشته باشد. یکی از این $\vec{dL}$ ها باعث حداکثر تغییرات تابع $f_{(n)}$ میشود به آن $\vec{dL}$، بردار $\vec{dn}$ میگوییم، میتوان نوشت $\vec{dn} = dn\,\hat{a}_n$

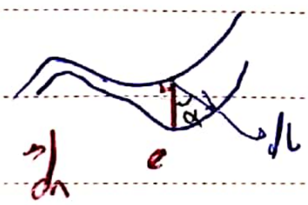
اندازه — بردار یک جهت

رابطه محاسباتی: برای بدست آوردن رابطه محاسباتی ابتدا سطوح هم مقدار از تابع $f_{(\,)}$ را در نظر میگیریم سطوح هم مقدار با رابطه $f_{(x_1,x_2,x_3)} = c$ می‌شود

مقدار ثابت

مثال: اگر دما هر نقطه را با رابطه $T(x,y,z) = (2xyz + x^2)^{\circ c}$ مشخص شده باشد. رابطه $2xyz + x^2 = 2$ سطحی را نشان میدهد که تمام نقاط آن $2^{\circ c}$ می‌باشد. حال دو سطح هم مقدار که خیلی بهم نزدیک باشند را در نظر میگیریم بدیهی است که اگر از نقطه‌ای روی c_1 جابجا شویم وقتی بیشترین تغییرات را داریم که با کمترین جابجایی به c_2 برسیم یعنی عمود بر سطح c_1 حرکت کنیم با توجه به شکل داریم:

$$|dn| = dL\cos\alpha$$



Subject.
Date.

$$|d\vec{n}| = |\vec{dL}| \cdot \cos\alpha = |\vec{dL}|\, \underbrace{a_{dL} \cdot \hat{a}_n}_{} = \vec{dL} \cdot \hat{a}_n$$

$$|\underbrace{a_{dL}}_{1}| \cdot |\underbrace{\hat{a}_n}_{1}| \cos\alpha \Rightarrow$$

با توجه به رابطه فوق و تعریف ریاضی گرادیان داریم:

$$\vec{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial n} \cdot \hat{a}_n$$

$$\vec{\nabla f} \cdot \vec{dL} = \frac{\partial f}{\cancel{\partial n}} \cdot \underbrace{\cancel{\hat{a}_n \cdot \vec{dL}}}_{= |\vec{\partial n}|} = df_{()} \Rightarrow \boxed{df_{()} = \vec{\nabla f} \cdot \vec{dL}}$$

رابطه فوق مهمترین خاصیت گرادیان را نشان می دهد با استفاده از این خاصیت براحتی میتوان رابطه ی سه تایی گرادیان را نوشت. کافیست ابتدا df را با استفاده از مشتقات جزئی بنویسیم و $\vec{dL}$ را با استفاده از ضرایب متریک تا مؤلفه ها $\vec{\nabla f_{()}}$ معلوم شوند.

$$df_{()} = \underbrace{\frac{\partial f_{()}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_{()}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f_{()}}{\partial u_3} du_3}_{}$$

دیفرانسیل تابع $f_{()}$ با استفاده از مشتقات جزئی

$$\vec{dL} = h_1 du_1 \hat{a}_{u_1} + h_2 du_2 \hat{a}_{u_2} + h_3 du_3 \hat{a}_{u_3}$$

$$\vec{\nabla f_{()}} = ?_1 \hat{a}_{u_1} + ?_2 \hat{a}_{u_2} + ?_3 \hat{a}_{u_3}$$

Subject.
Date.

با توجه به رابطه فوق $\quad ?_1 \underbrace{\hat{a}_{u_1} \cdot h_1 du_1 \hat{a}_{u_1}}_{=1} = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1$

$$\Rightarrow ?_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f_{()}}{\partial u_1} \quad , \quad ?_2 = \underbrace{?_3 =}_{\text{تمرین}}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f_{()}}{\partial u_1} \hat{a}_{u_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f_{()}}{\partial u_2} \hat{a}_{u_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f_{()}}{\partial u_3} \hat{a}_{u_3}$$

تمرین: رابطه فوق را در سه دستگاه بنویسید.

مثال: تابع $T(R, \theta, \phi) = R^2 \sin\theta \cos\phi$ بیانگر دما در هر نقطه ای باشد

الف) دما نقطه $(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ چقدر است

ب) جهتی که حائز بیشترین تغییرات دمایی است چیست؟

ج) اگر از نقطه فوق با اندازه بردار $d\vec{l} = 0/1 \hat{a}_R$ جابه جا کردیم تغییرات دما چقدر است

د) پاسخ ج را به روش دیگر بدست آورید: آیا پاسخ ها یکسان اند؟ چرا؟

Subject.
Date.

الف) $T(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = 2^2 \cos\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{4}$ °C

ب) این تغییرات در جهت گرادیان است.

$$\vec{\nabla} T(R, \theta, \phi) = \frac{\partial T}{\partial R} \hat{a}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{a}_\theta + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi} \hat{a}_\phi$$

$$= 2R\sin\theta\cos\phi\, \hat{a}_R + \frac{1}{R} \cdot R^2 \cos\theta \cdot \cos\phi\, \hat{a}_\theta$$

$$+ \frac{1}{R\sin\theta} R^2 \sin\theta(-\sin\theta)\, \hat{a}_\phi$$

$$\vec{\nabla} T(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = 2\times2\times\frac{\sqrt{2}}{2} \hat{a}_R + 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} \hat{a}_\theta +$$

$$2(-\frac{1}{2})\hat{a}_\phi = (\sqrt{4}\, \hat{a}_R + \frac{\sqrt{4}}{2} \hat{a}_\theta - \hat{a}_\phi)\ ^{\circ}C/m$$

جهت یعنی بردار واحد، پس: $\frac{\vec{\nabla} T_{()}}{|\vec{\nabla} T|}$ و $|\nabla T| = \sqrt{4 + \frac{4}{4} + 1} = \frac{\sqrt{24}}{2}$ اندازه

$$\Rightarrow \hat{a}_{\vec{\nabla}} = \frac{2\sqrt{4}}{\sqrt{24}} \hat{a}_R + \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{24}} \hat{a}_\theta - \frac{2}{\sqrt{24}} \hat{a}_\phi$$

Subject.
Date.

ج) وقتی در جهت $\hat{a}_R$ جابه‌جا می‌شوم فقط مختصه R تغییر می‌کند پس
مختصات جدید $(2+0.1, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}) = (2.1, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$ خواهد بود

$$T_2(2.1, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}) = (2.1)^2 \sin\frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi}{6} = 4.41 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{4.41\sqrt{6}}{4} \ {}^\circ C$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = (1.1025 - 1)\sqrt{6} = 0.1025\sqrt{6} \ {}^\circ C$$

د) از مهم‌ترین خاصیت گرادیان بهره می‌گیریم.

$$dT = \vec{\nabla} T \cdot \vec{dl} = (\sqrt{6}\,\hat{a}_R + \frac{\sqrt{6}}{2}\,\hat{a}_\theta - \hat{a}_\phi) \cdot 0.1\,\hat{a}_R$$

0 0 1

$$0.1\sqrt{6}$$

جوابها یکسان نیست، جواب ج دقیق‌تر است.
جواب (د) هنگامی درست است که $dl \to 0$ ولی در اینجا $dl = 0.1$ است یعنی
اگر dl کوچکتر از این بود خطا کمتر و کمتر می‌بود.

سوال امتحان: ۱- مفهوم فیزیکی Div را بنویسید و با استفاده از این مفهوم رابطه ریاضی آن را بدست آورید

Subject.
Date.

۲- رابطه ریاضی دیورژانس و رابطه محاسباتی آن را بنویسید و این رابطه را در دستگاه کروی بسط دهید

۲) دیورژانس

الف) مفهوم فیزیکی

براساس قضیه هلمهولتز میدان های برداری دو نوع منبع دارند: ۱. منابع نقطه‌ای که شکل چشمه ها و چاهک ها می شوند و ۲. منابع پیچشی ؛ دیورژانس ابزار ریاضی برای بررسی وجود منبع نقطه ای در یک نقطه می باشد؛ دیورژانس میدان برداری با نماد $\nabla . F(u_1, u_2, u_3)$ مشخص می شود؛ دیورژانس میدان برداری خود تابع اسکالر است.

ب) رابطه ریاضی

برای پی بردن به وجود منبع نقطه ای در یک نقطه باید حول آن نقطه انتگرال سطحی از میدان بگیریم؛ یعنی

$$\Psi = \oint_{\text{سطح بسته}} \vec{F}_{()} . \vec{d}_s$$

براساس پاسخ این انتگرال میتوان احکام زیر را صادر نمود.

$\Psi > 0 \Rightarrow$ در داخل سطح بسته منبع نقطه‌ای از نوع چشمه داریم
یا هر دو نوع چشمه و چاهک وجود دارند ولی چشمه‌ها بیشترند

$\Psi < 0 \Rightarrow$ در داخل سطح بسته منبع نقطه‌ای از نوع چاهک داریم
یا هر دو نوع چشمه و چاهک وجود دارند ولی چاهک ها بیشترند

$\Psi = 0 \Rightarrow$ یا منبع نقطه ای نداریم یا هر دو نوع چشمه و چاهک داریم که با هم برابرند.

Subject.
Date.

برای آنکه در مورد منبع نقطه‌ای صرفاً در یک نقطه بحث کنیم باید سطح بسته حول حجمی مثل ΔV باشد که این حجم سمت صفر میرود یعنی $\Delta V \to 0$ و برای آنکه ما اینکار خود انتگرال صفر نشود باید نتیجه را بر حجم ΔV تقسیم کرد. بدین ترتیب رابطه ریاضی دیورژانس بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}_{(\,)} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\text{سطح بسته حول } \Delta V} \vec{F}\cdot d\vec{s}}{\Delta V}$$

۲) رابطه محاسباتی: این رابطه مستقیما از روی رابطه ریاضی بدست می‌آید و به رابطه ذیل در دستگاه متعامد عمومی می‌رسیم

$$\nabla\cdot\vec{F}(u_1,u_2,u_3) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(h_2h_3F_{u_1}(\,)\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(h_1h_3F_{u_2}(\,)\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(h_1h_2F_{u_3}(\,)\right)\right]$$

تمرین: رابطه فوق را در کروی و کارتزین بنویسید و استوانه‌ای.

۴۰۰۶ / ۷

تمرین‌ها ← توضیحات اینکه تاول نوشته شود

Subject.
Date.

۳) کرل:

کرل: ابزار ریاضی برای پی بردن به منابع پیچشی میدان برداری است.

با همان توضیحی که در مورد دیورژانس گفتیم این ابزار با استفاده از تکرار خطی در مسیر بسته حول هر نقطه بدست می‌آید.

$$\frac{\oint_{\text{مسیر بسته حول } \Delta S} \vec{F} \cdot \vec{dl}}{\Delta S}$$

$$\text{کرل} = \nabla \times \vec{F} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_{\text{مسیر بسته حول } \Delta S} \vec{F} \cdot \vec{dl}}{\Delta S}$$

درون‌سو ← منبع راستگرد

برون‌سو ← منبع چپ‌گرد

ج) رابطه‌ی مساحتی: از آنجا که نتیجه کرل یک میدان برداری خود میدان برداری است، رابطه‌ی مساحتی با استفاده از دترمینان زیر حاصل می‌شود

$$\nabla \times \vec{F}(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{a}_{u_1} & h_2 \hat{a}_{u_2} & h_3 \hat{a}_{u_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_{u_1} & h_2 F_{u_2} & h_3 F_{u_3} \end{vmatrix}$$

Subject.
Date.

نکته کنکوری: صرفا در دستگاه کارتزین میتوان عملگر $\vec{\nabla}$ (بخوانید عملگر دل) را بصورت زیر نوشت:

$$\vec{\nabla}: \frac{\partial}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_z$$

حال گرادیان عبارت است از حاصل ضرب بردار فوق در تابع اسکالر $f(x,y,z)$ است.

و دیورژانس عبارت است از حاصل ضرب داخلی بردار فوق در میدان برداری $\vec{F}(x,y,z)$ است.

و کرل عبارت است از حاصلضرب خارجی بردار فوق در میدان برداری $\vec{F}(x,y,z)$ است.

نتیجه بردار با عدد بردار $\vec{\nabla} f = \frac{\partial}{\partial x} f \hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} f \hat{a}_y \quad \frac{\partial}{\partial z} f \hat{a}_z$

نتیجه ضرب نقطه ای عدد است. $\nabla . \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} F_{(x)}() + \frac{\partial}{\partial y} F_y() + \frac{\partial}{\partial z} F_z()$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}() = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x() & F_y() & F_z() \end{vmatrix}$$

Subject.

Date.

مثال: میدان برداری $\vec{F}(R,\theta,\phi) = R^2\sin\theta\,\hat{a}_R + R\sin\phi\cos\theta\,\hat{a}_\theta + 2\,\hat{a}_\phi$

مفروض است. کرل و دیورژانس آنرا حساب کنید

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{R^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\sin\theta\, F_{R}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(R\sin\theta\, F_{\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(R F_{\phi}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{R^2\sin\theta}\left[4R^3\sin^2\theta + R^2\sin\phi\cos 2\theta + 0\right]$$

$$\nabla\times\vec{F} = \frac{1}{R^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{a}_R & R\hat{a}_\theta & R\sin\theta\,\hat{a}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ R^2\sin\theta & R\sin\phi\cos\theta & R\sin\theta\cdot 2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{R^2\sin\theta}\Big[\left(2R\cos\theta - R^2\cos\phi\cos\theta\right)\hat{a}_R + \left(0 - 2\sin\theta\right)R\,\hat{a}_\theta$$

$$+ \left(2R\sin\phi\cos\theta - R^2\cos\theta\right)R\sin\theta\,\hat{a}_\phi\Big]$$

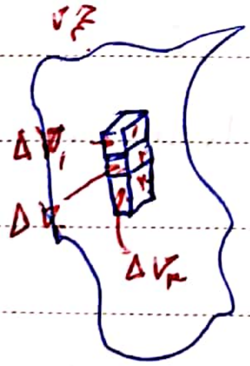
Subject.
Date.

قضایا و اتحادهای برداری:

۱- **قضیه دیورژانس:** براساس این قضیه جمع جبری منابع نقطه ای از یک میدان برداری که در داخل ناحیه ای به حجم V وجود دارد برابر است با فلوی میدان برداری که از سطح بیرونی حجم فوق خارج می شود. بیان ریاضی قضیه دیورژانس بصورت زیر است.

$$\oint_{\text{سطح بسته حول حجم } V} \vec{F}(\cdot)\, d\vec{s} = \int_{\text{در حجم } V} \nabla\cdot\vec{F}\, dv$$

اثبات: اثبات دقیقاً با استفاده از تعریف دیورژانس انجام می شود. ابتدا حجم V را به قطعات ΔV تقسیم نموده و برای هر یک قضیه دیورژانس را می نویسیم. این قضیه را طرفین وسطین کرده دو طرف روابط را با هم جمع می کنیم



$$\nabla\cdot\vec{F}\,(\text{نقطه } 1) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\text{حول } \Delta V_1} \vec{F}\cdot d\vec{s}}{\Delta V_1}$$

طرفین وسطین

$$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{F}_{(1)}\cdot\Delta V_1 = \oint_{\text{حول } \Delta V_1} \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

$$\nabla\cdot F_{(2)}\,\Delta V_2 = \oint_{\text{حول } \Delta V_2} \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

$$\vdots$$

$$\nabla\cdot\vec{F}_{(n)}\cdot\Delta V_n = \oint_{\text{حول } \Delta V_n}$$

Subject.
Date.

جمع شم ⟸ $\int_{V} \nabla \cdot \vec{F} \, d_v = \oint \vec{F} \cdot \vec{d_s}$

در کل V — در سطح بسته بیرونی

توجه: وقتی قسمت راست معادلات را جمع می‌کنیم توجه کنید که فلوی که از وجه مشترک ΔV_1 به سمت ΔV_2 می‌رود منفی فلوی است که از همین وجه از ΔV_2 به ΔV_1 می‌رود و این دو باهم حذف می‌گردند. به همین ترتیب تمام فلوها در وجوه مشترک باهم حذف می‌شوند و تنها فلوهایی باقی می‌مانند که از سطح بیرونی حجم V خارج می‌شود

قضیه استوکس: این قضیه دوگان قضیه دیورژانس است. بر اساس این قضیه جمع منابع پیچشی یک میدان برداری دلخواه که از یک سطح مثل S عبور می‌کند برابر است با انتگرال خطی آن میدان حول مسیر بسته

$$\oint \vec{F} \cdot \vec{dL} = \int \nabla \times \vec{F}_{()} \cdot \vec{d_s}$$

مسیر بسته حول S

اثبات: مشابه قضیه دیورژانس یک سطح s به قطعات ΔS تقسیم شده و برای هر کدام رابطه کرل را می‌نویسیم الی آخر

سوال امتحان: قضایای استوکس و دیورژانس را بنویسید و قضیه دیورژانس را اثبات کنید

سوال امتحان: در ابعاد برداری صفحه را نوشته و یکی را اثبات کنید.

Subject.
Date.

دو اتحاد برداری صفحه: اتحاد های برداری زیر برای هر میدان یا تابع اسکالر دلخواه درست است.

① $\nabla \times \nabla \vec{f}(u_1, u_2, u_3) = 0$

کرل گرادیان از هر تابع اسکالر دلخواه برابر صفر است.

② $\nabla \cdot \nabla \times \vec{F}(u_1, u_2, u_3) = 0$

دیورژانس کرل از هر میدان برداری دلخواه برابر صفر است.

اثبات: هر دوی اتحادهای فوق را می‌توان با نوشتن روابط گرادیان و دیورژانس و کرل در دستگاه متعامد عمومی و بسط آنها، اثبات کرد.
(تمرین: اینکار را خودتان انجام دهید)

روش دیگر: انتگرال گیری از اتحادهای فوق و اثبات آنکه این انتگرال ها همیشه برابر صفر می‌شود، است.

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$$

$$\int f(x)\,dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

برای هر حد دلخواه

Subject.
Date.

اثبات اتحاد اول:

$$\int_S \nabla \times \nabla f(u_1,u_2,u_3) \cdot \vec{ds} = \oint \underbrace{\nabla f_{()} \cdot \vec{dl}}$$

در یک سطح دلخواه

مسیر بسته حول S طبق قضیه استوکس

مهم‌ترین خاصیت گرادیان

$$\nabla f \cdot \vec{dl} = df$$

$$= \oint df = \int df = f\Big] = f_{(\text{از یک نقطه})} - f_{(\text{در همین نقطه})} = 0$$

مسیر بسته — از یک نقطه / به همان نقطه — از یک نقطه / به همین نقطه

چون انتگرال برای سطح دلخواه صفر شد پس خودش صفر است. $\Leftarrow$ $\nabla \times \nabla f = 0$

اثبات اتحاد دوم:

$$\int_V \nabla \cdot \nabla \times \vec{F}_{()} \, dv = \oint \nabla \times \vec{F}_{()} \cdot \vec{ds} = \oint \vec{F} \cdot \vec{dl} = 0$$

حجم دلخواه V

طبق قضیه دیورژانس — سطح بسته حول V — طبق قضیه استوکس — مسیر بسته حول سطح بسته

طول چنین مسیری صفر است $\Leftarrow$ سفره قند را در نظر بگیرید که مسیر بسته دورش طول نخ دور آن است. وقتی نخ را می‌کشیم تا سفره بسته شود طول نخ صفر شده است.

Subject.

Date.

قضیه هلمهولتز: هر میدان برداری در حد یک ثابت نموی مشخص می‌گردد هرگاه کرل و دیورژانس آن مشخص شده باشد.

توضیح: قبلا در مورد تابع اسکالر $f(x)$ هم چنین بیانی را دیده اید. مشتق $f(x)$ یعنی $f'(x)$ تابع f را در حد یک ثابت نموی توصیف می‌کند. یعنی اگر از نقطه x به اندازه dx جابجا شویم میتوانیم نمو df را هم بدست آوریم. پس با داشتن یک نقطه اولیه یعنی (x_0, y_0) و $f'(x)$ میتوان به $f(x)$ رسید.

در میدان برداری برای آنکه با داشتن بردار در یک نقطه (x_1, x_2, x_3) به میدان در تمام نقاط رسید، لازم است دو نوع مشتق داشته باشیم هم کرل و هم دیورژانس.

فصل ۲ میدان های الکتریکی ساکن

Subject.
Date.

هرگاه یک بار الکتریکی در نقطه ای از فضا قرار گیرد ، فضای اطراف خود را تغییر می دهد بگونه ای که از سوی این فضای تغییر یافته بر دیگر بارها نیرو وارد می شود.
تغییرات فضا با میدان برداری (x_1 و x_2 و x_3) $\vec{E}$ نشان داده میشود که میدان الکتریکی نامیده می شود؛ مقدار میدان E در هر نقطه برابر با نیرویی است که بر واحد بار الکتریکی وارد می شود پس اگر این میدان بر بار آزمون q نیروی F را وارد کرده باشد داریم:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \Rightarrow \vec{F} = \vec{E}.q$$

براساس رابطه فوق واحد $\vec{E}$ ، N/C است یا $kg\, m.s^{-2}.C^{-1}$

میدان ساکن یعنی میدانی که مقدار آن با زمان تغییر نکند یعنی باری که آن را ایجاد کرده کم و زیاد نشود و جابه جا هم نشود.

اصول موضوعه میدان های الکتریکی ساکن

این اصول عبارت اند از:

① $\nabla.\vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$ ضریب گذردهی خلا

② $\nabla \times \vec{E} = 0$

اصل اول می گوید میدان های $\vec{E}$ منبع نقطه ای دارند
و اصل دوم می گوید منبع پیچشی ندارند ؛ براساس اصل اول پخشش میدان E در هر نقطه برابر است با چگالی بار حجمی در آن نقطه (ρ_v را بخوانید رو وی)
تقسیم بر ضریب گذردهی خلاء (ε_0 را بخوانید اپسیلون صفر) q/m^3
$8{,}85 \times 10^{-12}$ $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9$

قضیه گوس و کاربردهای آن:

با کاربرد قضیه دیورژانس برروی اصل موضوعه اول قضیه گوس تشکیل میشود که قسمت از اصل اول در محدوده دیگران انتگرال بگیریم

پرسش امتحان: اصول موضوعه را نوشته و قضیه گوس را نتیجه بگیرید.

$$\int \nabla \cdot \vec{E}\, d_v = \int \frac{\rho_v}{\varepsilon_0} d_v$$

قضیه دیورژانس

بار محصور در حجم V

$$\oint E \cdot d_s = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho_v\, d_v = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

کل بار موجود داخل V

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{d_s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \longrightarrow \text{قضیه گوس}$$

سطح بسته حول V

قضیه گوس می گوید شارش میدان الکتریکی که از هر سطح بسته خارج می شود برابر است با جمع جبری بارهای موجود داخل آن سطح بسته تقسیم بر ضریب گذردهی خلا

کاربردهای قضیه گوس: این قضیه همواره درست است و در صورتی که توزیع بار الکتریکی متقارن باشد می توان با استفاده از آن براحتی میدان حاصل از توزیع بار متقارن را حساب کرد.

Subject.
Date.

پرسش امتحان: شرایط تقارن چیست. در این شرایط میدان $\vec{E}$ چطور بدست می‌آید؟

شرایط تقارن: هرگاه بتوان حول توزیع بار سطح بسته‌ای در نظر گرفت بطوریکه:

اولاً) میدان $\vec{E}$ بر سطح بسته عمود باشد یا با آن سطح موازی باشد.

ثانیاً) در نقاطی که $\vec{E}$ بر سطح عمود است اندازه آن ثابت باشد.

گوئیم شرایط تقارن حاکم است. تحت این شرایط می‌توان نوشت

شرط اولاً — شرط ثانیاً

$$\oint E \cdot d_s \overset{!}{=} \int_{s_1} + \int_{s_2} = \int_{s_1} |\vec{E}| \cdot \underbrace{\hat{a}_E \cdot |\vec{d_s}|\, \hat{a}_{d_s}}_{=1}$$

$\hat{a}_s \parallel \hat{a}_{d_s}$ سطح بسته

بخشی که $\vec{E}$ بر سطح عمود است یعنی

بخشی که $\vec{E}$ با سطح موازی است

$$+ \int_{s_2} |\vec{E}| \cdot \underbrace{\hat{a}_E \cdot |\vec{d_s}|\, \hat{a}_{d_s}}_{=0}$$

پس $\hat{a}_s \perp \hat{a}_{d_s}$

دقت کنید که $\hat{a}_{d_s}$ هم بر سطح عمود است.

$$\Rightarrow |\vec{E}| = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

نکته مهم: قضیه گوس جهت میدان را به ما نمی‌دهد بلکه جهت میدان باید ابتدا با استدلال مشخص گردد و با استفاده از این جهت است که می‌توان وجود شرایط تقارن را بررسی نمود. برای استدلال دقت می‌کنیم که هر ذره از توزیع بار میدان را در همه جهات ایجاد می‌کند. حال در هر نقطه دلخواه باید برآیند میدان‌های تمام ذرات را در نظر گرفت.

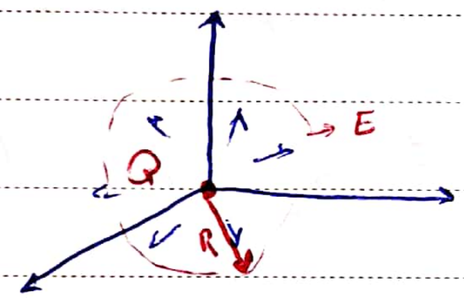
Subject.
Date.

کلا سه دسته مثال و مسئله با روش گوس وجود دارد که حل می‌شود:
مسائل در دستگاه: کروی - استوانه‌ای و کارتزین

الف) دستگاه کروی:

مثال ①: بار نقطه‌ای q در مرکز مختصات مفروض است. $\vec{E}$ را در همه جا حساب کنید

جواب:



قدم اول) تعیین جهت میدان و بررسی
شرایط تقارن: میدان در همه جا شعاعی است

پس اگر سطح بسته را کره‌ای به شعاع R فرض کنیم!
$E = |\vec{E}| \cdot \hat{a}_R$ ← در دستگاه کروی
میدان در جهت $\hat{a}_R$ است. (شعاعی است)
اولاً: در تمام نقاط آن میدان بر سطح عمود است
ثانیاً) در هر نقطه از سطح کروی بایستیم شرایط یکسانی ببینیم پس $|\vec{E}|$ هم در تمام نقاط ثابت است

گام دوم: محاسبه اندازه $|E|$

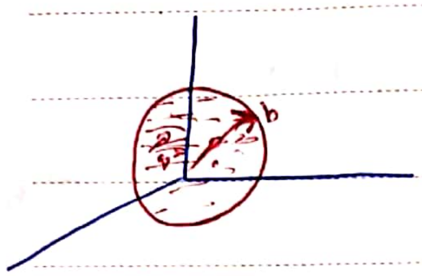
$$|E| = \frac{Q}{\varepsilon_0 S_1} = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi R^2}$$

S_1: مساحت جانبی کره به شعاع R

Subject.

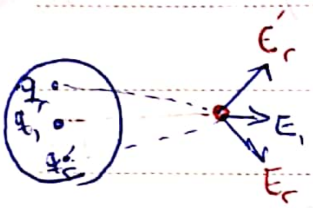
Date.

مثال ۵: کره باردار به شعاع R با بار حجمی به چگالی $\rho = \rho_0 r^2$ کولن بر متر مکعب مفروض است، $\vec{E}$ را در همه جا حساب کنید



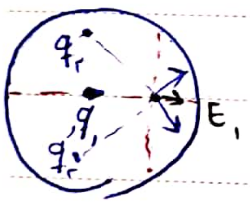
گام اول: ابتدا برای نقطه‌ای در بیرون بحث می‌کنیم

بارهایی که روی خط واصل از مرکز کره تا محل بار هستند میدانشان شعاعی است و بارهایی که روی این خط نیستند هم بصورت جفتی میدانشان شعاعی می‌شود؛ پس برای تمام نقاط بیرونی $E = |\vec{E}| \cdot \hat{a}_R$ و اگر نقطه دلخواه داخل کره باشد:



نقطه دلخواه داخل کره باشد:

باز خط واصل از مرکز کره به نقطه را رسم می‌کنیم و همینطور وتری که در نقطه فوق بر خط واصل عمود است را هم می‌کشیم.



همانطور که در شکل دیده می‌شود بارهای موجود در سمت چپ وتر میدان در جهت $\hat{a}_R$ ایجاد می‌کنند و بارهای موجود در سمت راست میدان در جهت $-\hat{a}_R$ ایجاد می‌کنند ولی چون بارهای سمت چپ بیشترند برآیند میدان کل بارها در جهت $+\hat{a}_R$ می‌شود. (در مرکز کره میدان صفر است.) پس چه در داخل و خارج از کره $\vec{E} = |\vec{E}| \cdot \hat{a}_R$ ثانیاً اگر بر روی کره‌ای به شعاع R باشیم اندازه میدان با توجه به تقارن کروی بار ثابت است.

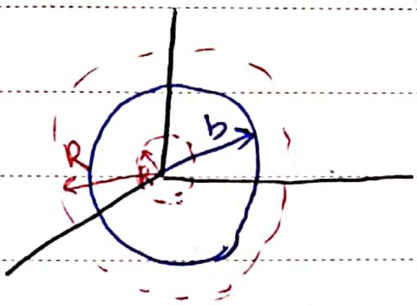
Subject.
Date.

بار محصور در کره گوس

گام دوم: محاسبه اندازه $|\vec{E}|$

$$|\vec{E}| = \frac{Q}{\varepsilon_0 S_1}$$

بار محصور در کره گوس در دو حالت $a<b$ و $b<R$ فرق می‌کند



$$Q_{\text{محصور}} = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho_0 & R<b \\ \frac{4}{3}\pi b^3 \cdot \rho_0 & b<R \end{cases}$$

بنابراین

$$|\vec{E}| = \begin{cases} \dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho_0}{\varepsilon_0 \cdot 4\pi R^2} = \dfrac{\rho_0 R}{3\varepsilon_0} & R<b \\[2ex] \dfrac{\frac{4}{3}\pi b^3 \cdot \rho_0}{\varepsilon_0 \cdot 4\pi R^2} = \dfrac{\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0 R^2} & b<R \end{cases}$$

$$\vec{E} = |\vec{E}| \cdot \hat{a}_R = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 R}{3\varepsilon_0}\, \hat{a}_R & R<b \\[2ex] \dfrac{\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0 R^2} \cdot \hat{a}_R & b<R \end{cases}$$

Subject.
Date.

تمرین ۵: در مثال فوق چگالی بار حجمی را بصورت

الف) $\rho_v = \rho_0 R$ ب) $\rho_v = \rho_0 R^2$ در نظر بگیرید و حل کنید

راهنمایی: گام اول فرقی نمی‌کند ولی در گام دوم چون چگالی متغیر است بار محصور باید با انتگرال حجمی محاسبه گردد.

$dv = h_1 h_2 h_3\, du_1\, du_2\, du_3$

$$Q_{\text{محصور}} = \int \rho_v\, dv = \int_{R=0}^{b}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \rho_0 R \cdot \underbrace{R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dR}_{dv = h_1h_2h_3 du_1 du_2 du_3} \qquad b<R$$

بیرون کره

حجم کل کره باردار

$$= \rho_0 \int_{R=0}^{b} R^3\, dR \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{b^4}{4} \times 2 \times 2\pi = \pi b^4 \rho_0$$

$$\int_{R'=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \rho_0 R' \cdot R'^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dR' = \frac{R^4}{4}\cdot 4\pi \qquad R<b$$

داخل کره

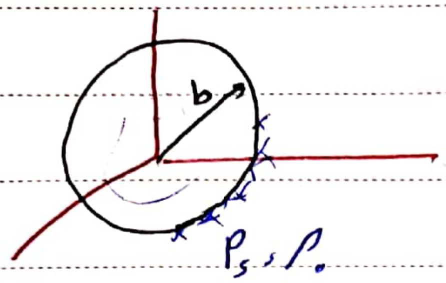
$$= \pi R^4 \rho_0$$

مجبوریم پریم بگذاریم چون میخواهیم تا R انتگرال بگیریم.

$$|\vec{E}| = \frac{Q_{\text{محصور}}}{\epsilon_0 S} = \begin{cases} \dfrac{\pi b^4 \rho_0}{\epsilon_0 4\pi R^2} = \dfrac{\rho_0 b^4}{4\epsilon_0 R^2} & b<R \\[2ex] \dfrac{\pi R^4 \rho_0}{\epsilon_0 4\pi R^2} = \dfrac{\rho_0 R^2}{4\epsilon_0} & R<b \end{cases}$$

Subject.
Date.

تمرین ۹ : بار سطحی کروی با شعاع b با چگالی ρ_0 و ρ_s مفروض است
$\vec{E}$ را محاسبه کنید



$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & R < b \\ \dfrac{4\pi b^2 \rho_0}{\varepsilon_0 4\pi R^2}\hat{a}_R = \dfrac{\rho_0 b^2}{\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R & b < R \end{cases}$$

$$d_s = h_1 h_2\, d_R d_\theta\, \hat{a}_\phi + h_1 h_3\, d_R d_\phi\, \hat{a}_\theta + h_2 h_3\, d_\theta d_\phi\, \hat{a}_R$$

سوال امتحان : اصول موضوعه میدان‌های الکتریکی را به فرم نقطه‌ای (دیفرانسیل) نوشته و فرم انتگرالی آنرا بدست آورید.

① $\nabla \cdot E = \dfrac{\rho_v}{\varepsilon_0}$

فرم انتگرالی (خطی) با انتگرال گرفتن

② $\nabla \times E = 0$

① $\int \nabla \cdot E \, d_v = \int \dfrac{\rho_v}{\varepsilon_0} d_v$

با استفاده از قضیه دیورژانس

$$\oint E \cdot d_s = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

قضیه گوس

② $\int \nabla \times E \, d_s = \int 0 \, d_s$

استوکس

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = 0$$

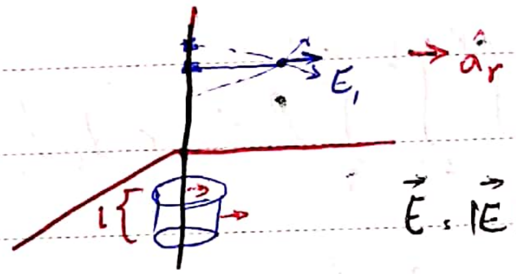
Subject.
Date.

اصل موضوعه دوم به فرم خطی نشان می‌دهد که میدان $\vec{E}$ کنسرواتیو یا نگهدارنده (هر میدان برداری که انتگرال خطی آن در مسیر بسته صفر باشد کنسرواتیو یا نگهدارنده است) خواهیم دید که میدانهای کنسرواتیو را می‌توان برابر با گرادیان یک تابع اسکالر دانست.

ادامه حل مسائل و مثالهای روش گوس:

ب) دستگاه استوانه‌ای:

مثال: بار خطی با چگالی $\rho_\ell = \rho_0 \ [\frac{c}{m}]$ با طول بی نهایت به محور z منطبق است.
E را در همه جا حساب کنید



گام اول: با توجه به شکل و نامحدود بودن طول بار
میدان در تمام نقاط در جهت $\hat{a}_r$ است $\vec{E} = |\vec{E}|\hat{a}_r$

اگر سطح بسته را مطابق شکل استوانه هم محور با بار بطول L و شعاع r در نظر بگیریم
اولاً $\vec{E}$ بر سطح جانبی عمود است و بنا به قاعده سولنوئیدی (تقارن) در هر نقطه که باشیم شرایط یکسان
می‌بینیم پس $|\vec{E}|$ در این نقطه ثابت است. در سطح جانبی

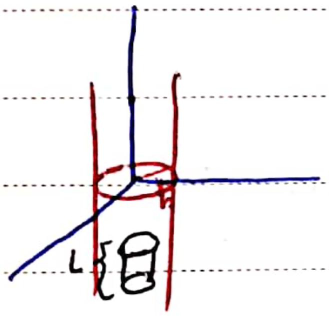
گام دوم: $|E| = \dfrac{Q_{محصور}}{\varepsilon_0 S_1} = \dfrac{\rho_0 L}{\varepsilon_0 2\pi r L} = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0 2\pi r}$

$\vec{E} = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0 2\pi} \dfrac{\hat{a}_r}{r}$

Subject.
Date.

مثال ۲: استوانه باردار به شعاع b با محور z با بار حجمی به چگالی $\rho = \rho_0 r^2 \; [c/m^3]$ و بطول بی نهایت مفروض است E را در همه جا محاسبه کنید

توجه: اگر تغییرات بار با ϕ یا z بود دیگر تقارن استوانه‌ای نداشت با روش گوس حل نمی‌شود دقیقاً مانند کروی هم همینه یعنی اگر در کروی θ و ϕ تغییرات بود حل نمی‌شد.



گام اول، مشابه استدلال راجع به کره بار متغیر، بحث نموده و نتیجه می‌گیریم چه در داخل و چه در خارج $\vec{E} = |\vec{E}|\hat{a}_r$

سطح بسته گوس، استوانه ای با طول L و شعاع r و هم محور با استوانه باردار در نظر می‌گیریم r میتواند کوچکتر یا بزرگتر از b باشد.

$$\vec{E} = \frac{Q_{\text{محصور}}}{\varepsilon_0 S_1}$$

سطح جانبی استوانه گوسی

$$Q_{\text{محصور}} = \int_{\text{شعاع}} \rho \, dv$$

$r<b$:
$$Q = \int_{r=0}^{r}\int_{z=0}^{L}\int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_0 r^2 \cdot r \, d\phi \, dz \, dr = \rho_0 \frac{r^4}{4} \cdot 2\pi \cdot L$$

$r>b$:
$$Q = \int_{r=0}^{b}\int\int \dots = \rho_0 \frac{b^4}{4} L \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow |\vec{E}| = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r^3}{4\varepsilon_0} & r<b \\[2ex] \dfrac{\rho_0 b^4}{4r\varepsilon_0} & r>b \end{cases}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r^3}{4\varepsilon_0}\hat{a}_r & r<b \\[2ex] \dfrac{\rho_0 b^4}{4\varepsilon_0 r}\hat{a}_r & r>b \end{cases}$$

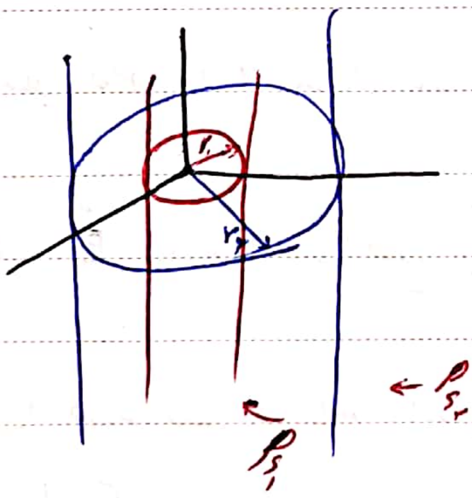
Subject. $[c/m^3]$
Date.

تمرین: مثال فوق را در حالت الف) $\rho_v = \rho_0$ c/m^3 ب) $\rho_v = \rho_0 r$

جواب (الف) $\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\hat{a}_r & r<b \\ \dfrac{\rho_0 b^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{a}_r & r>b \end{cases}$

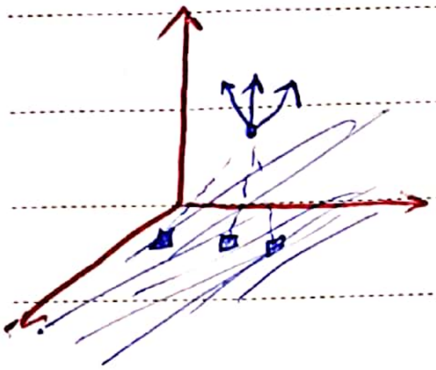
جواب (ب) $\begin{cases} \dfrac{\rho_0 r^2}{3\varepsilon_0}\hat{a}_r & r<b \\ \dfrac{\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0 r}\hat{a}_r & b<r \end{cases}$

تمرین: مطابق شکل دو پوسته استوانه‌ای با بارهای سطحی $[c/m^2]$ ρ_{s_1} و ρ_{s_2} در نظر گرفته $\vec{E}$ را در همه جا حساب کنید.



جواب $\vec{E} = \begin{cases} 0 & r<r_1 \\ \dfrac{\rho_{s_1} r_1}{\varepsilon_0 r}\hat{a}_r & r_1<r<r_2 \\ ? & r_2<r \end{cases}$

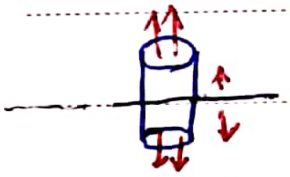
Subject. در جاهایی که $\vec{E}$ عمود است
Date.
میدان ثابت است.



ج) در دستگاه کارتزین:

مثال: صفحه $z=0$ حامل بار سطحی به چگالی ρ_s است E را در همه جا حساب کنید.

گام اول: مطابق شکل برآیند میدان ذرات باردار در بالا صفحه در جهت $\hat{a}_z$ و در پایین صفحه در جهت $-\hat{a}_z$ است.



$$\vec{E} = \begin{cases} |\vec{E}|\,\hat{a}_z & z>0 \\ |\vec{E}|\,(-\hat{a}_z) & z<0 \end{cases}$$

اگر سطح گوس را استوانه‌ای با قاعده های موازی صفحه $z=0$ و مساحت A فرض کنیم:

اولاً) $\vec{E}$ عمود بر قاعده ها خارج می‌گردد و موازی سطح جانبی است.

ثانیاً) در هر نقطه از قاعده ها باشیم شرایط یکسان می‌بینیم پس $|\vec{E}|$ در قاعده‌ها ثابت است.

Subject.
Date.

گام دوم:

$$|\vec{E}| = \frac{Q_{\text{محصور}}}{\varepsilon_0 S}$$

$\rho_s \times$ سطح مقطع $= \rho_0 A$

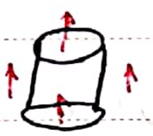
جاییکه میدان عمودی خارج

$A + A$ می‌شود

$$|\vec{E}| = \frac{\rho_0 A}{\varepsilon_0 (2A)} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} (\hat{a}_z) & z > 0 \\ \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} (-\hat{a}_z) & z < 0 \end{cases}$$

سوال: اگر سطح بسته گوسی را کلاً بالای صفحه باردار فرض کنیم



با شرایط تقارن داریم ولی میدان صفر نیست چرا؟

$z = 0$ صفحه

$$|\vec{E}| = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{0}{\varepsilon_0 (A - A)} = \frac{0}{0}$$ مبهم

A از بالا خارج — A از پایین وارد

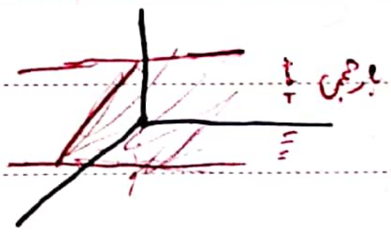
سطح بسته را باید جایی گرفت که بار محصور داشته باشیم تا پاسخ مبهم نگردد.

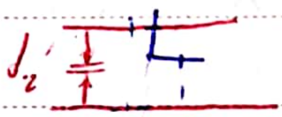
Subject.
Date.

تمرین: صفحه $z=0$ حامل ρ_{s_1} و $z=1$ حامل ρ_{s_2} و $z=-1$ حامل ρ_{s_3} می‌باشد. $\vec{E}$ را در همه جا حساب کنید

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho_1+\rho_2+\rho_3}{2\varepsilon_0}\,\hat{a}_z & 1<z \\ ? & 0<z<1 \\ ? & -1<z<0 \\ \dfrac{\rho_1+\rho_2+\rho_3}{2\varepsilon_0}\,(-\hat{a}_z) & z<-1 \end{cases}$$

تمرین ② فضای بین $-1<z<1$ حامل باردار با بار حجمی به چگالی $\rho = \rho_0 z$ است.





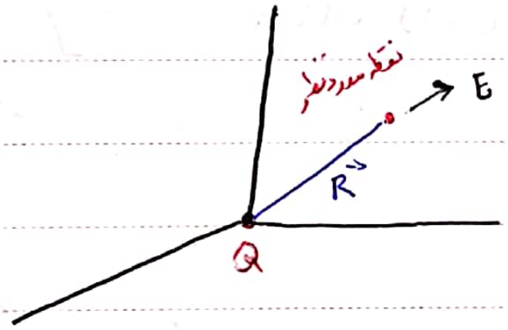
راهنمایی: بارها را بصورت لایه‌هایی به ضخامت dz' فرض می‌کنیم که در صفحه $z=z'$ قرار دارد. میدان حاصل از آن

$$d\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 z' dz'}{2\varepsilon_0}\,\hat{a}_z & z'<z \\ " \;(-\hat{a}_z) & z'>z \end{cases}$$

$d\vec{E}$ است حال باید برای هر نقطه دلخواه از این $d\vec{E}$ انتگرال گرفت.

Subject.
Date.

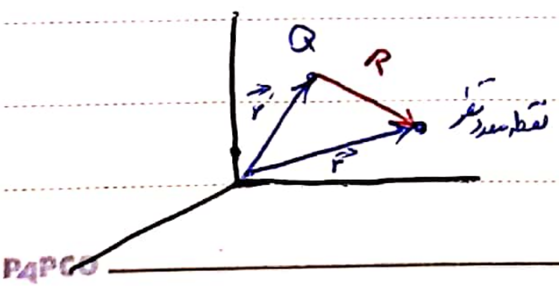
روش کولن: در بحث گذشته دیدیم که میدان حاصل از یک توزیع بار متقارن براحتی با روش گوس بدست می‌آید. اگر توزیع بار متقارن نباشد می‌توان آنرا مجموعه از بارهای متقارن در نظر گرفت (در بدترین حالت مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای) حال کافیست با استفاده از اصل جمع آثار میدان حاصل از بارهای نقطه‌ای را با هم جمع کرد. از آنجا که در توزیع بار تنها یک بار نقطه‌ای متقارن در مبدا باشد لازم است میدان حاصل از بار نقطه‌ای در خارج از مبدا مختصات بدانیم اینکار با استفاده از بردار واصل از محل بار به نقطه مورد نظر انجام می‌گردد.



قبلاً دیدیم $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\hat{a}_R}{R^2}$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R\,\hat{a}_R}{R^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3}$$

$\vec{R}$ بردار واصل از مبدا مختصات به نقطه مورد نظر است یعنی از محل بار به نقطه مورد نظر. اگر Q در مبداء نباشد بلکه در نقطه‌ای با بردار وضعیت $\vec{r}'$ باشد و بخواهیم $\vec{E}$ را در نقطه‌ای با بردار وضعیت $\vec{r}$ حساب کنیم از بردار واصل $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ استفاده می‌کنیم



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Subject. $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^{9}$

Date.

مثال: بار $2\,C$ و q در نقطه $(1,2,3)$ قرار دارد. $\vec{E}$ را در نقطه $(4,4,4)$ (الف) و مبدا مختصات حساب کنید

$\vec{r}' = \hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 3\hat{a}_z$

در حالت (الف) $\vec{r}_1 = 4\hat{a}_x + 4\hat{a}_y + 4\hat{a}_z$

در حالت (ب) $\vec{r}_2 = 0$

در حالت (الف) $\Rightarrow \vec{E} = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(4-1)\hat{a}_x + (4-2)\hat{a}_y + (4-3)\hat{a}_z}{[(4-1)^2 + (4-2)^2 + (4-3)^2]^{\frac{3}{2}}}$

چون اندازه‌ش پس زیر رادیکال به توان می‌رسانیم

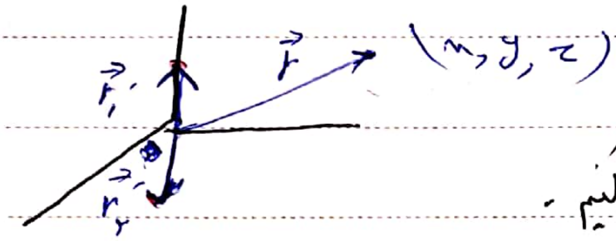
در حالت (ب) $\vec{E} = 18\times10^{9}\,\frac{-\hat{a}_x - 2\hat{a}_y - 3\hat{a}_z}{(14)^{\frac{3}{2}}}$

نکته مهم: اگر n بار نقطه‌ای گسسته $q_1, q_2, \ldots, q_n$ داشته باشیم که در نقاطی با بردار وضعیت $\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \ldots, \vec{r}'_n$ مستقر هستند بخواهیم $\vec{E}$ را در نقطه‌ای با بردار وضعیت $\vec{r}$ حساب کنیم از قانون جمع آثار بهره می‌گیریم:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Subject.
Date.

مثال: دوقطبی ساده: بار q در نقطه $(0,0,\frac{d}{2})$ و $-q$ در نقطه $(0,0,-\frac{d}{2})$ هستند. $\vec{E}$ را در نقطه دلخواه حساب کنید.



در گام اول بردارهای مکان را می‌نویسیم

در گام دوم در فرمول جایگذاری کرده و حساب می‌کنیم.

$$\vec{r} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$$

$$\vec{r}_1' = \frac{d}{2}\hat{a}_z$$

$$\vec{r}_1' = -\frac{d}{2}\hat{a}_z$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + (z-\frac{d}{2})\hat{a}_z}{[x^2+y^2+(z-\frac{d}{2})^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + (z+\frac{d}{2})\hat{a}_z}{[x^2+y^2+(z+\frac{d}{2})^2]^{\frac{3}{2}}}$$

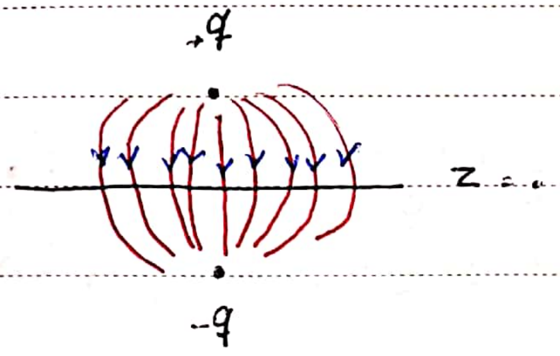
مثال ۲: میدان دوقطبی فوق را در نقطه $z=0$ حساب کنید

$$\vec{E}(x,y,0) = \frac{q(-d\hat{a}_z)}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+\frac{d^2}{4})^{\frac{3}{2}}}$$

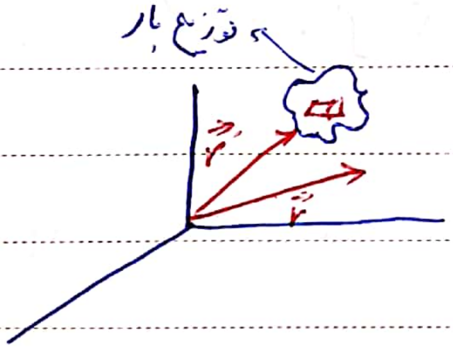
وقتی $z=0$ قرار می‌دهیم مخرج‌ها مشترک می‌شوند و در صورت، جملات $x\hat{a}_x$ ، $y\hat{a}_y$ حذف می‌شوند.

Subject.
Date.

مباحث فوق نشان می‌دهد که در تمام نقاط صفحه $z=0$ میدان در جهت $-\hat{a}_z$ است.



نکته کاربردی: اگر توزیع بار پیوسته داشته باشیم باید ابتدا $\vec{dE}$ حاصل از dq که در بردار مکان $\vec{r'}$ مستقر است را در نقطه‌ای با بردار $\vec{r}$ بنویسیم و از این جا انتگرال بگیریم.



$$\vec{dE} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3}$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r'}$$

$$\vec{E} = \int \vec{dE}$$

در محدوده

Subject.
Date.

در حل مسائل به روش کولن گام های زیر را طی داریم:

گام یک ①: با توجه به توزیع بار دستگاه مختصاتی انتخاب می کنیم که انتگرال گرفتن در محدوده توزیع بار در آن دستگاه ساده تر باشد و سعی می کنیم قبل از حل مسئله جهت میدان را حدس بزنیم

گام دوم ②: بردارهای $\vec{r}$ و $\vec{r'}$ و dq را می نویسیم. (دقت کنید که در نوشتن $\vec{r}-\vec{r'}$ از بردارهای پایه متفاوت فاکتور نگیریم.) dq با توجه به توزیع بار بصورت های زیر نوشته می شود.

توزیع بار خطی $dq = \rho_l \, dl$ → یگانه

توزیع بار سطحی $dq = \rho_s \, ds$ → دوگانه

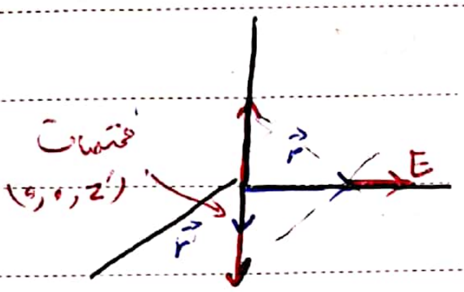
توزیع بار حجمی $dq = \rho_v \, dv$ → سه‌گانه

گام سه ③: جایگذاری پارامترها در انتگرال برداری حساب می کنیم یعنی مجموعه اسکالر برای مولفه بردار. ممکن است از ابتدا جهت میدان را حدس زده و بگوییم که یک یا دو مولفه از سه مولفه صفر می شود. همچنین ممکن است پس از نوشتن رابطه انتگرال از تکنیکهای ریاضی استفاده کنیم مثلا وقتی از یک تابع فرد انتگرال با حدود متقارن می گیریم نتیجه صفر می شود: $\int_{-x_1}^{x_1} f_o(x)\,dx = 0$ odd یا انتگرال تابع زوج با حدود متقارن بصورت زیر ساده می شود: $\int_{-x_1}^{x_1} f_e(x)\,dx = 2\int_{0}^{x_1} f_e(x)\,dx$ ؛ تکنیک دیگر در محاسبه انتگرال استفاده از نتایج مسائل ساده تر در مسائل پیچیده تر می باشد.

Subject.
Date.

تمام متغیرهایی که مربوط به r هست $'$ می‌گذاریم.

شکل ۱. مطابق شکل بار خطی به طول L روی محور z حامل بار خطی به چگالی الف) ρ_L ثابت ب) $\rho_L = \rho_0 z^{[0,2]}$ ، $\vec{E}$ را در نقطه‌ای روی محور y حساب کنید.



گام اول: مطابق شکل بردارهای $\vec{r}$ و $\vec{r}'$ و dl را می‌نویسیم برای نوشتن $\vec{r}$ و $\vec{r}'$ کافیست به مختصات آنها توجه کنیم ضمناً هر ... که مربوط به محل بار است را با پریم متمایز می‌کنیم.

$\vec{r} = y\hat{a}_y$ $\qquad$ $\vec{r}' = z'\hat{a}_z$

بار خطی $dq = \rho_L dl = \rho_0 dz'$ ← در توزیع بار فقط متغیر z تغییر می‌کند پس dl مربوط به dq با dz ساخته می‌شود و پریم می‌گذاریم چون مربوط

گام سوم:

$$\vec{E} = \int_{z'=-L/2}^{L/2} \frac{\rho_0 dz'}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{y\hat{a}_y - z'\hat{a}_z}{(y^2+z'^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\rho_0 y \hat{a}_y}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dz'}{(y^2+z'^2)^{3/2}} - \frac{\rho_0 \hat{z}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{z'dz'}{(z'^2+y^2)^{3/2}}$$

تابع زوج برحسب z.

تابع فرد برحسب z ... انتگرال با حدود متقارن $= 0$

Subject.

Date.

$$\frac{\rho_0\, y\, \hat{a}_y}{4\pi\varepsilon_0} \times 2\int_0^{L/2} \frac{dz'}{(y^2+z'^2)^{3/2}} = \frac{\rho_0\, \hat{a}_y\, L}{4\pi\varepsilon_0 y\sqrt{y^2+\frac{L^2}{4}}}$$

جواب انتگرال

$$\left.\frac{z'}{y^2\sqrt{z'^2+y^2}}\right]_{z'=0}^{L/2} = \frac{L/2}{y^2\sqrt{y^2+\frac{L^2}{4}}}$$

ب)

$$\vec{E} = \int \frac{\rho_0\, z'\, dz'}{4\pi\varepsilon_0}\, \frac{(y\hat{a}_y - z'\hat{a}_z)}{(y^2+z'^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\rho_0\, y\, \hat{a}_y}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int \frac{z'\, dz}{(y^2+z'^2)^{3/2}}}_{\text{فرد}} - \frac{\rho_0\, \hat{a}_z}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int \frac{z'^2\, dz'}{(z'^2+y^2)^{3/2}}}_{\text{زوج}}$$

$$= -\frac{\rho_0\, \hat{a}_z}{4\pi\varepsilon_0} \times 2\int_0^{L/2} (\ ) = \frac{-\rho_0\, \hat{a}_z}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(z' + \sqrt{z'^2+y^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{z'}{\sqrt{z'^2+y^2}}\right]_0^{L/2}$$

$$= \frac{\rho_0}{2\pi\varepsilon_0}(-\hat{a}_z)\left[\ln \frac{L/2 + \sqrt{\frac{L^2}{4}+y^2}}{|y|} - \frac{L/2}{\sqrt{\frac{L^2}{4}+y^2}}\right]$$

!! برای متغیرها لیرم کدام!

سوال: در مثال فوق (الف) آیا اگر $L \to \infty$ یعنی که بدست می‌آید با آنچه به روش گوس بدست آمده مطابقت دارد یا نه؟

در روش گوس دیدیم: $\vec{E} = \frac{\rho_0 \hat{a}_r}{2\pi\varepsilon_0 r}$ در اینجا $\lim_{L\to\infty} \vec{E} = \frac{\rho_0 \hat{a}_y}{4\pi\varepsilon_0 y} \lim_{L\to\infty} \frac{L}{\sqrt{y^2+\frac{L^2}{4}}}$

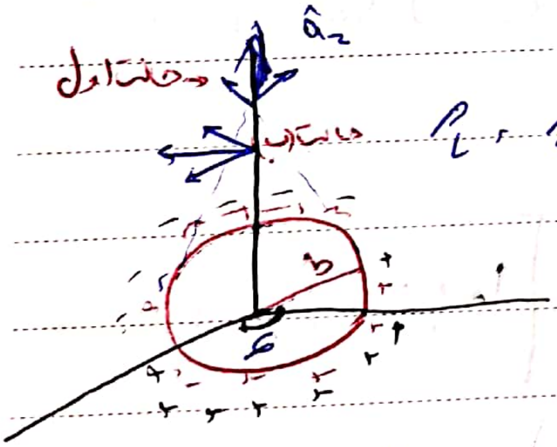
$\frac{L}{\frac{L}{2}} = 2$

$$\Rightarrow \frac{\rho_0 \hat{a}_y}{2\pi\varepsilon_0 y}$$

نتایج همانند یکسان است زیرا در نقطه $(0,y,0)$ بر اساس روابط تبدیل $y = r$ و $\hat{a}_y = \hat{a}_r$

مثال: مطابق شکل یک حلقه باردار با شعاع b در صفحه $z=0$ با بار خطی به چگالی

الف) $\rho_L = \rho_0$ ب) $\rho_L = \rho_0 \sin\phi$



حالت (ب)

جواب: قبل از حل مسئله با استدلال پی می‌بریم که در حالت الف جهت میدان $\hat{a}_z$ و در حالت (ب) $-\hat{a}_y$ خواهد بود

گام بعد) نوشتن r و r' و dq با استفاده از مشخصات المان بار و نقطه مورد نظر انجام می‌شود.

Subject.
Date.

$\vec{r} = z\,\hat{a}_z$

دراستوانه ای $\vec{r}' = b\,\hat{a}_r + 0\,\hat{a}_z$

$\Big\} \Rightarrow \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = z\,\hat{a}_z - b\,\hat{a}_r$

گام آخر: جایگذاری

$$E = \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{b\rho_0\, d\phi'(z\hat{a}_z - b\hat{a}_r)}{4\pi\varepsilon_0 (b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho_0 b}{4\pi\varepsilon_0 (b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \Big($$

$$= \Big(z\hat{a}_z \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi'}_{2\pi} - b \underbrace{\int_0^{2\pi} \hat{a}_r\, d\phi'}\Big)$$

$\rightarrow \int \hat{a}_x \cos\phi'\, d\phi' + \dots$

$\dots \int \hat{a}_y \sin\phi\, d\phi'$

$$\int_0^{2\pi} \cos\phi\, d\phi = \int_0^{2\pi} \sin\phi\, d\phi = 0$$

با توجه به آنکه از ابتدای دانستیم جهت $\vec{E}$ برابر است با $\hat{a}_z$ می شود فقط انتگرال

(جواب الف $\dfrac{\rho_0 b z\,\hat{a}_z}{2\varepsilon_0 (b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

Subject.
Date.

حل قسمت (ب): در اینجا گام اول و دوم مثل الف است تنها تفاوت

$dq = \rho_0 \sin\phi' \, b \, d\phi'$

$$\vec{E} = \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{b\rho_0 \sin\phi' \, d\phi' \, (z\,\hat{a}_z - b\,\hat{a}_r)}{4\pi\varepsilon_0 (b^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\rho_0 b}{4\pi\varepsilon_0 (b^2+z^2)^{3/2}} \left(z\,\hat{a}_z \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\phi' \, d\phi'}_{0} - b\int_0^{2\pi} \hat{a}_r \sin\phi' \, d\phi' \right.$$

چون با تغییر ϕ جهت $\hat{a}_r$ عوض می‌شود و ثابت نیست

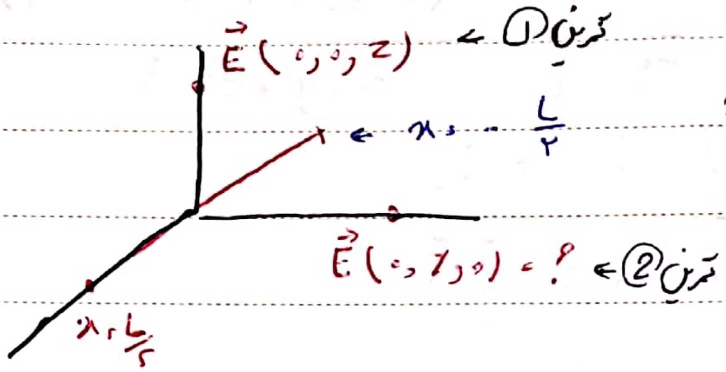
$$\int_0^{2\pi} \hat{a}_r \sin\phi' \, d\phi' = \underbrace{\int_0^{2\pi} a_x \cos\phi' \sin\phi' \, d\phi'}_{a_x \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin 2\phi \, d\phi} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \hat{a}_y \sin^2\phi' \, d\phi'}$$

$$\frac{\hat{a}_y}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} (1-\cos 2\phi') \, d\phi'}_{\pi \, \hat{a}_y}$$

$$= \frac{\rho_0 b(-b\pi\,\hat{a}_y)}{4\pi\varepsilon_0 (b^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\rho_0 b^2(-\hat{a}_y)}{4\varepsilon_0 (b^2+z^2)^{3/2}}$$

Subject.
Date.

تمرین: میدان $\vec{E}$ را برای شکل های مقابل حساب کنید

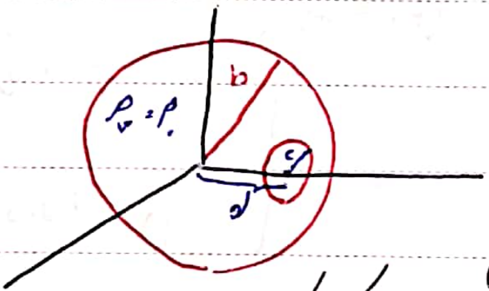


بار خطی بطول L روی محور x

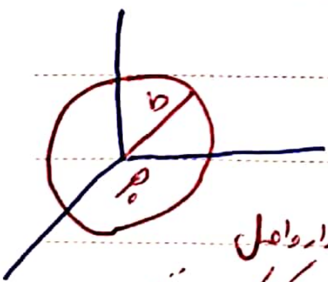
الف) $\rho_L = \rho_0$

ب) $\rho_L = \rho_0 x$

تمرین ③: یک کره باردار به شعاع b با بار حجمی با چگالی ثابت ρ_0 مفروض است. در داخل کره مطابق شکل حفره‌ای به شعاع c ایجاد شده است. $\vec{E}$ را در نقطه‌ای خارج از کره حساب کنید



راهنمایی: فرض می‌کنیم داخل حفره بار $(-\rho_0) + \rho_0$ داشته باشیم حال در هر نقطه خارج از کره باید میدان یک کره توپر با شعاع b و بار ρ_0 و یک کره توپر با بار $-\rho_0$ با شعاع c که مرکز آن $(0,d,0)$ است را حساب کنیم $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$



$$E_1 = \frac{\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R = \frac{\rho_0 b^3 R\hat{a}_R}{3\varepsilon_0 R^3} = \frac{\rho_0 b^3 \vec{R}}{3\varepsilon_0 |\vec{R}|^3}$$

بردار واصل از مرکز کره و مورد نظر به نقطه $\vec{R} = \underset{\text{نقطه مورد نظر}}{\vec{r}} - \underset{\text{مرکز کره}}{\vec{r}'} = (x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z) - 0$

$$\vec{E}_2 = \frac{-\rho_0 c^3\left[\underbrace{(x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z)}_{\text{نقطه مورد نظر}} - \underbrace{(0\hat{a}_x + d\hat{a}_y + 0\hat{a}_z)}_{\text{مرکز کره } -\rho_0}\right]}{3\varepsilon_0\left[x^2 + (y-d)^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Subject.
Date

بیرون از دو کره

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[\frac{b^3(x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{c^3(x\hat{a}_x + (y-d)\hat{a}_y + z\hat{a}_z)}{\left[x^2+(y-d)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

تمرین تحویلی

حال: هر دو شکل مثل فقط نقطه ای دلخواه (داخل یا خارج)

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0 R^2}\,\hat{a}_R & b<R \quad A \\[2ex] \dfrac{\rho_0 R}{3\varepsilon_0}\,\hat{a}_R & R<b \quad B \end{cases}$$

A برحسب کارتزین

B برحسب کارتزین

$$E_2 = \begin{cases} C \\ D \end{cases}$$

برحسب کارتزین

C بیرون کره کوچک

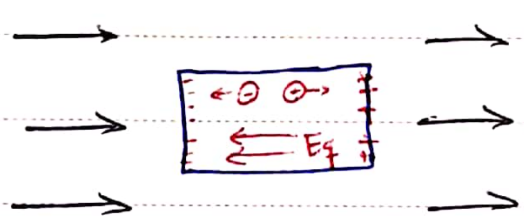
D داخل کره کوچک

$$\vec{E} = \begin{cases} A + C & \text{بیرون از دو کره} \\ B + C & \text{بیرون کره کوچک داخل کره بزرگ} \\ B + D & \text{داخل کره کوچک} \end{cases}$$

Subject.
Date.

میدان الکتریکی ساکن در هادی‌ها:

هادی محیطی است که در آن بارهای آزاد براحتی میتوانند حرکت نمایند. هرگاه تکه‌ای از هادی را در میدان الکتریکی قرار دهیم بارهای مثبت در جهت میدان و بارهای منفی در خلاف جهت میدان آنقدر حرکت می‌کنند تا میدان حاصل از تجمع بارها میدان بیرونی را خنثی کند و از آنجا به بعد بارها دیگر حرکت نمی‌کنند.



میدان داخل هادی $E_i = \vec{E}_q + \vec{E}_0 = 0$

میدان تجمع بارها   میدان خارجی

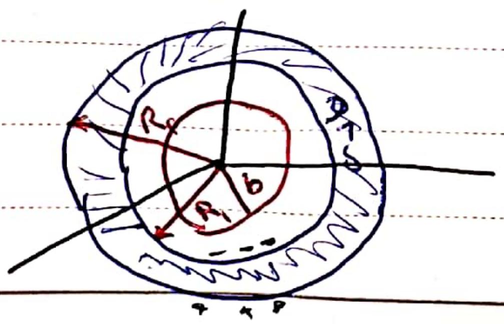
هرگاه بخواهیم میدان ساکن در محیطی که شامل هادی است را حساب کنیم بدون هیچ ملاحظه‌ای میدان ساکن داخل هادی را صفر فرض می‌کنیم

سوال میان ترم

مثال: کره باردار با چگالی ثابت ρ_1 و ρ_2 و شعاع b را داخل پوسته هادی مطابق شکل درنظر گرفته و

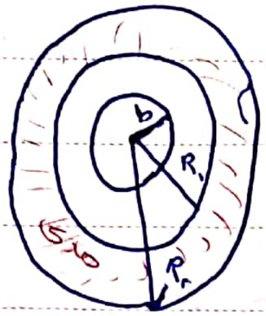
الف) E در همه جا را حساب کنید   ب) چگالی بار سطحی جمع شده روی هادی

$\rho_2 = \rho_0$



Subject.
Date.

میدان الکتریکی ساکن در مادی‌ها:



الف) $\vec{E}$ در همه جا

ب) ρ_s در سطح مادی

پاسخ: با توجه به اینکه هم توزیع بار و هم محیط (پوسته مادی)، هر دو تقارن کروی دارند از روش گوس مسئله را حل می‌کنیم

$$E = |\vec{E}| . a_R \qquad |\vec{E}| = \frac{Q_{\text{محصور}}}{\varepsilon_0 S}$$

الف)

$$Q_{\text{محصور}} = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi R^3 & R<b \\ \frac{4}{3}\pi b^3 & b<R<R_1 \\ 0 = \frac{4}{3}\pi b^3 \rho_0 + \rho_s^- 4\pi R_1^2 & R_1<R<R_2 \\ \frac{4}{3}\pi b^3 \rho_0 + \underbrace{\rho_s^- \times 4\pi R_1^2 + \rho_s 4\pi R_2^2}_{=0} & \end{cases}$$

چون داخل مادی هستیم.

$=0$ چون دیدیم از اول خنثی بودن

$$|\vec{E}| = \begin{cases} \frac{\rho_0 R}{3\varepsilon_0} & R<b \\ \frac{\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0 R^2} & b<R<R_1 \\ 0 & R_1<R<R_2 \\ \frac{\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0 R^2} & R_2<R \end{cases}$$

و $\vec{E} = |\vec{E}|\, \hat{a}_R$

Subject
Date

ادامه مثال:

ب) با توجه به روابطی که برای بار محصور نوشته‌ایم ρ_s ها به دست می‌آید.

$$\frac{4}{3}\pi b^3 \rho_0 + \rho_s^- \cdot 4\pi R_1^2 = 0 \rightarrow \rho_s^-\Big|_{R=R_1} = \frac{-\rho_0 b^3}{3R_1^2} \quad [C/m^2]$$

$$\rho_s^- 4\pi R_1^2 + \rho_s^+ 4\pi R_2^2 = 0 \Rightarrow \rho_s^+\Big|_{R=R_2} = -\rho_s^- \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{\rho_0 b^3}{3R_2^2} \quad [C/m^2]$$

پتانسیل الکتریکی:

دیدیم که برای توزیع بارهای نامتقارن مجبوریم از روش کولن استفاده کنیم. در این روش محاسبه $\vec{E}$ مستلزم محاسبه ۳ انتگرال است. برای آنکه محاسبه $\vec{E}$ ساده‌تر شود ریاضیدانان به دنبال پیدا کردن تابعی اسکالر بودند تا گرادیان آن برابر $\vec{E}$ شود. این جستجو با توجه به اصل موضوعی دوم $\nabla \times \vec{E} = 0$ و اتحاد صفر اول $\nabla \times \nabla f$ شروع شد. یعنی گفته شده $\vec{E}$ می‌تواند برابر با گرادیان یک تابع اسکالر باشد. این تابع پتانسیل الکتریکی نامیده شد و فرض شد که $\vec{E} = \vec{\nabla} V$.

بعد از این فرض باید روشی ابداع گردد تا محاسبه V حاصل از یک توزیع بار ممکن شود. برای این منظور کار لازم برای انتقال بار q (که تحت تاثیر میدان $\vec{E}$ قرار دارد) از نقطه P_1 به نقطه P_2 را حساب می‌کنیم.

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_{P_1}^{P_2} (-\vec{E}q)\, \vec{dl}$$

نیرویی که میدان اعمال می‌کند $F = Eq$ و ما باید نیرویی مخالف آن را اعمال کنیم.

Subject.
Date.

ادامه پاسخ $= -q\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{l}$

فرض می‌کنیم $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ تا علامت منفی حذف گردد.

$$\Rightarrow W = -q\int(-\vec{\nabla}V)\cdot d\vec{l} = q\int_{P_1}^{P_2}\vec{\nabla}V\cdot d\vec{l} = q\int_{P_1}^{P_2} dV$$

مهم‌ترین خاصیت میدان

$$\Rightarrow W = q\left[V(P_2) - V(P_1)\right]$$

$$\Rightarrow V_{(P_2)} - V_{(P_1)} = \frac{W}{q}$$

در رابطه فوق مهم‌ترین خاصیت پتانسیل الکتریکی بیان شده است که بر اساس آن:

«اختلاف پتانسیل نقطه P_2 با نقطه P_1 برابر انرژی لازم برای انتقال واحد بار الکتریکی از P_1 به نقطه P_2 می‌باشد.»

سوال امتحان: مهم‌ترین خاصیت پتانسیل الکتریکی را بنویسید و با استفاده از آن رابطه پتانسیل حاصل از توزیع را بدست آورید.

Subject.
Date.

رابطه ی اساسی پتانسیل الکتریکی:

ابتدا با استفاده از خاصیت پتانسیل برای یک بار نقطه ای مستقر در مبدا مختصات، پتانسیل در نقطه دلخواه را به دست می‌آوریم. ولی برای این منظور ابتدا باید مرجع پتانسیل مشخص کنیم زیرا پتانسیل الکتریکی یک کمیت فیزیکی نسبی می‌باشد. مرجع پتانسیل هر نقطه‌ای می‌تواند باشد. معمول ترین مرجع پتانسیل نقطه‌ای در ∞ است.

با این توضیحات پتانسیل حاصل از بار q مستقر در مبدا مختصات را نسبت به مرجع ∞ حساب می‌کنیم.

نقطه مورد نظر

پتانسیل = $V_{\infty}(P)$ = انرژی لازم برای آوردن واحد بار از ∞ به نقطه P $\Rightarrow \int_{\infty}^{P} F\cdot d\vec{l} = \int_{\infty}^{P} \vec{E}q \cdot d\vec{l}$ (1)

مرجع

واحد بار

فرمول کلی $\Rightarrow$ رابطه کلی محاسبه V در نقطه دلخواه $\Rightarrow$

$$V_{\infty}(P) = -\int_{\infty}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

ابتدا $\vec{E}$ را با روش گوس بدست بیاورید.

برای بار q داریم:

$$E_{\text{حاصل از } q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{a}_R}{R}$$

قبلا در دستگاه کروی بدست آوردیم

$$V = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

در توزیع بارهای محدود با فرض ∞ به عنوان مرجع

Subject.
Date.

$$\Rightarrow V_\infty(P) = -\int_\infty^P \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\hat a_R}{R^2}\cdot\left(dR\,\hat a_R + R\,d\theta\,\hat a_\theta + R\sin\theta\,d\phi\,\hat a_\phi\right)$$

مختصات نقطه P (R,θ,ϕ)

$$= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty \frac{dR}{R^2} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty \frac{dR'}{R'^2} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{R'}\right]_{R'=\infty}^{R}$$

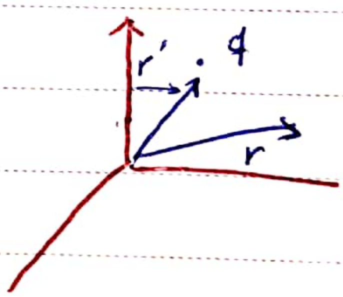
چون R را در حد نیاز داریم پریم می‌گذاریم.

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

نتیجه: پتانسیل حاصل از بار نقطه‌ای نسبت به ∞ برابر است با $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{\text{فاصله از بار}}$

اگر بار q در مبدا نباشد بلکه در نقطه‌ای با بردار موقعیت $\vec r'$ باشد.

$$V_\infty(\vec r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\,|\vec r - \vec r'|}$$



Subject.
Date.

ادامه پتانسیل الکتریکی

جلسه گذشته تعریف پتانسیل و مهم ترین خاصیت آن را به دست آوردیم و بر اساس آن پتانسیل حاصل از بار الکتریکی مستقر در مبدا مختصات را در نقطه ای دلخواه با فرض مرجع پتانسیل در ∞ محاسبه نمودیم. با استفاده از اصل جمع آثار براحتی میتوان پتانسیل حاصل از توزیع بار گسسته و پیوسته را نیز نوشت. خلاصه این روابط بصورت زیر است:

برای حل مسائل پتانسیل به نکات زیر توجه کنید

۱- مسائل در ۳ گام حل می شوند. در گام اول سعی کنید به شکل ذهنی مسئله را حل کنید و تخمین در سمت از جواب داشته باشید. در این گام بهترین دستگاه مشخص می شود

۲. در گام دوم کمیت های مورد نیاز برای حل مسئله مثل $\vec{r}$ ، $\vec{r}'$ ، dq را باید مشخص کنیم و در گام سوم

۳- در گام سوم انتگرال جمع آثار محاسبه می شود.

۴- تمام نکاتی که در روش کولن گفته شد در اینجا هم کاربرد دارد الا اینکه پتانسیل برداری نیست.

الف) با توجه به توزیع بار بهترین دستگاه را که در آن دستگاه انتگرال ساده تر است انتخاب می کنیم

Subject.
Date.

ب) dq در بارهای حجمی $\rho\, dv$ است و انتگرال سه‌گانه می‌شود
" " " سطحی $\rho_s\, ds$ " " دوگانه "
" " " خطی $\rho_l\, dl$ " " یگانه "

ج) برای جلوگیری از اشتباه تمام متغیرهایی که مربوط به محل بار هستند و باید در انتگرال شرکت کنند را با علامت پریم متمایز می‌کنیم.

د) در محاسبه انتگرال از جدول انتگرالها و همچنین تکنیک های ریاضی حل مفید شده انتگرال از تابع فرد با حدود متقارن کمک می‌گیریم.

هـ) می‌توان از نتایج مسائل ساده در حل مسائل پیچیده‌تر استفاده کرد.

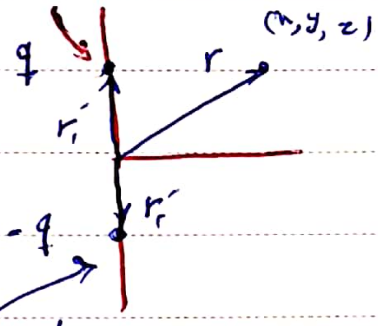
۵) برای حل تمام مسائل می‌توان از رابطه $V = -\int_{\text{مرجع}}^{\text{حدود نقطه}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$ استفاده کرد. در مسائلی که $\vec{E}$ به راحتی به روش گوس بدست می‌آید و همچنین در محاسبه پتانسیل توزیع بارهای نامحدود از این رابطه بهره می‌گیریم ولی در محاسبه پتانسیل بارهای محدود که تقارن گوس ندارند با احتساب ∞ به عنوان مرجع پتانسیل از رابطه $V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|}$ پتانسیل را حساب می‌کنیم.

Subject.
Date.

مثال ۱ دوقطبی الکتریکی مطابق شکل مفروض است V را در نقطه الف) (x, y, z) ب) روی صفحه z=0 حساب کنید

سوال ۱ چرا جواب (ب) صفر می‌شود.

مختصات
$(0,0,\frac{d}{2})$



$(0,0,-\frac{d}{2})$

(گام دوم) $r = x\,\hat{a}_x + y\,\hat{a}_y + z\,\hat{a}_z$

$\vec{r}_1' = \frac{d}{2}\hat{a}_z$

$r_2' = (-\frac{d}{2})\hat{a}_z$

گام سوم: $V = \sum_{i=1}^{2} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i'|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\frac{d}{2})^2}}\right.$

$\left.+\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+\frac{d}{2})^2}}\right]$

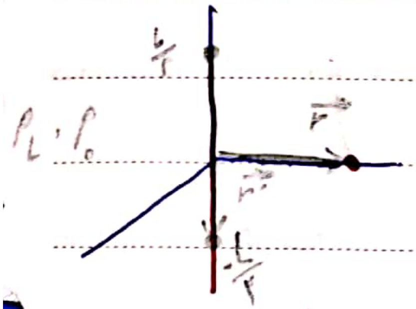
ب) $V(x,y,0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\frac{d^2}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\frac{d^2}{4}}}\right] = 0$

جواب سوال: قبلا دیدیم در صفحه z=0 میدان $\vec{E}$ در جهت $-\hat{a}_z$ است اگر در صفحه z=0 بار q را از ∞ به نقطه دلخواه بیاوریم همیشه $\vec{E} \perp \vec{dl}$, $\vec{E}\cdot\vec{dl}$ صفر می‌شود

پس $\int_{\infty}^{\text{مورد نظر}} \vec{E}\cdot\vec{dl} = 0$

Subject.
Date.

مثال ۴ : پاره خط باردار بطول L مفروض است $V(0,y,0)$ ؟



گام دوم

$\vec{r} = y\,\hat{a}_y$

$\vec{r}' = z'\,\hat{a}_z$

$dq = \rho_L\, dL = \rho_0\, dz'$

دیفرانسیل طول نقطه با تغییر z' ساخته می‌شود.

مختصات $(0,0,z')$

چون در مختصات بردی z هم متغیر باشد

گام سوم:

$$V(0,y,0) = \int_{z'=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\rho_0\, dz'}{4\pi\varepsilon_0\underbrace{\sqrt{z'^2+y^2}}_{\text{تابع زوج از } z'}}$$

$$= \frac{2\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln\left(z'+\sqrt{y^2+z'^2}\right]_{z'=0}^{\frac{L}{2}}\right) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\frac{L}{2}+\sqrt{y^2+\frac{L^2}{4}}}{|y|}\right)$$

تمرین : مثال فوق را با $\rho_L = \rho_0 z$ ، $\rho_L = \rho_0 |z|$ حل کنید.

مثال ۵ : در مثال فوق اگر طول L بی نهایت شود V چقدر می‌شود؟

جواب $\lim_{L\to\infty} V(0,y,0) = \ln(\infty) = \infty$

از آنجا که در اینجا توزیع بار نامحدود داریم و استفاده از رابطه $V = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}$ مستلزم فرض ∞ به عنوان مرجع است در اینجا پاسخ ∞ شد.

Subject.
Date.

- برای آنکه پاسخ مشخص بدست آوریم، باید مرجع مشخص را فرض نموده و از رابطه

$V = -\int_{\text{مرجع}}^{\text{نقطه مورد نظر}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$ استفاده کنیم.

از آنجا که میدان بار بطول بی نهایت را قبلاً در استوانه ای حساب کرده ایم

$E = \frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\hat{a}_r}{r}$ پس نقطه (r_0, ϕ_0, z_0) را مرجع پتانسیل فرض می‌کنیم و V را

در استوانه ای حساب می کنیم.

$$V(r,\phi,z) = -\int_{(r_0,\phi_0,z_0)}^{(r,\phi,z)} \frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\hat{a}_r}{r'}\cdot\left(dr'\,\hat{a}_r + r'\,d\phi\,\hat{a}_\phi + dz\,\hat{a}_z\right)$$

$$V(r,\phi,z) = \frac{-\rho_0}{2\pi\epsilon_0}\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'} = \frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

دقت کنید که اولاً V تنها به r بستگی پیدا کرد یعنی سطوح استوانی r ثابت سطوح هم پتانسیلند. ثانیاً) اگر $r > r_0$ یعنی پتانسیل منفی می‌شود

زیرا وقتی از سطح مرجع $r = r_0$ به r بزرگتر می رویم لازم نیست انرژی صرف کنیم

بلکه انرژی می گیریم.

Subject.
Date.

پتانسیل الکتریکی در هادی‌ها: قبلاً دیدیم، ۰ = میدان ساکن داخل آن ≡ هادی الکتریکی ①

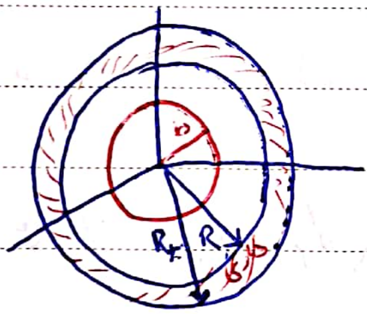
داخل هادی اختلاف $\Leftarrow$ $-\int_{\text{نقطهٔ اول}}^{\text{نقطهٔ دوم}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ = اختلاف پتانسیل دو نقطهٔ داخل هادی

پتانسیل = ۰

مثال: کره باردار با بار حجمی $\rho_v = \rho_0 R$ $[C/m^3]$ به شعاع b داخل پوسته چگالی هادی مطابق شکل مفروض است.

الف) $\vec{E}$ در همه جا

ب) V در همه جا



$$Q_{\text{محصور}} = \int_{R=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_0 R\, R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dR$$

$$E = \frac{Q_{\text{محصور}}}{\varepsilon_0 S_1} = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi R^2}$$

$$\vec{E}(R,\theta,\phi) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0}\,\hat{a}_R & R<b \\[2mm] \dfrac{\rho_0 b^4}{4\varepsilon_0 R^2}\,\hat{a}_R & b<R<R_1 \\[2mm] 0 & R_1<R<R_2 \\[2mm] \dfrac{\rho_0 b^4}{4\varepsilon_0 R^2}\,\hat{a}_R & R_2<R \end{cases}$$

Subject.
Date.

با توجه به آن که $\vec{E}$ را داریم از فرمول اصلی پتانسیل استفاده می کنیم، با توجه به آنکه بار محدود است مرجع را ∞ گرفته و از ∞ انتگرال می گیریم.

$$V(R,\theta,\phi) = -\int_{\infty}^{R,\theta,\phi} |\vec{E}|\,\hat{a}_R \cdot (d_R\,\hat{a}_R + \dots + \dots)$$

$$= -\int_{R'=\infty}^{R} |\vec{E}| \cdot d_{R'}$$

$$-\int_{\infty}^{R} \frac{\rho_0 b^4}{4\varepsilon_0 R'^2}\, d_{R'} \qquad R_2 < R < \infty$$

$$-\frac{1}{R'}\Big]_{R'=\infty}^{R}$$

$$= \frac{-\rho_0 b^4}{4\varepsilon_0}\int \frac{d_{R'}}{R'^2} = \frac{\rho_0 b^4}{4\varepsilon_0 R}$$

$$R_1 < R < R_2$$

$$-\int_{\infty}^{R} = -\int_{\infty}^{R_2} - \int_{R_2}^{R} = \frac{\rho_0 b^4}{4\varepsilon_0 R_2} - \int_{R_2}^{R} \circ\, d_l$$

Subject.

Date.

$$-\int_{\infty}^{R} = -\int_{\infty}^{R_1} - \int_{R_1}^{R} = \qquad b<R<R_1$$

$$= \frac{\rho_0 b^4}{4\varepsilon_0 R_2} - \int_{R'=R_1}^{R} \frac{\rho_0 b^4}{4\varepsilon_0 R'^2}\, dR'$$

$$\underbrace{\frac{\rho_0 b^4}{4\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right]}$$

$$\Big\downarrow R=b$$

$$-\int_{\infty}^{b} - \int_{b}^{R} = \qquad -\int_{R'=b}^{R} \frac{\rho_0 R'^2}{4\varepsilon_0}\, dR' \qquad R<b$$

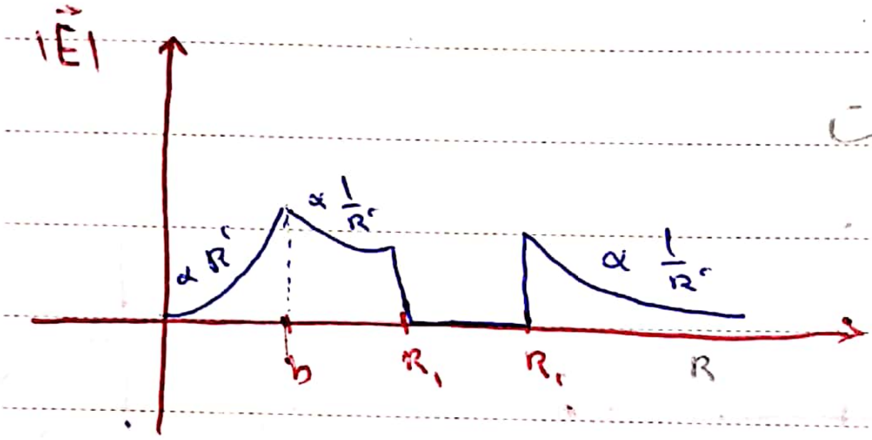
$$V(R,\theta,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 b^4}{4\varepsilon_0 R} & R_2<R<\infty \\[2ex] \dfrac{\rho_0 b^4}{4\varepsilon_0 R_2} & R_1<R<R_2 \\[2ex] \dfrac{\rho_0 b^4}{4\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_2}-\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R}\right) & b<R<R_1 \\[2ex] \dfrac{\rho_0 b^4}{4\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_2}-\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{3b}-\dfrac{R^3}{3b^4}\right) & R<b \end{cases}$$

PAPCO

Subject.

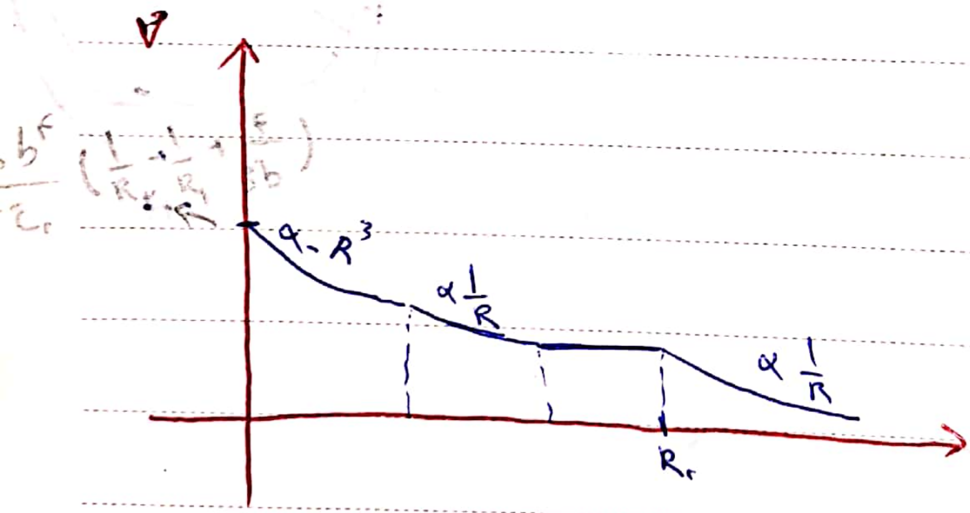
Date.

مثال ۲: در مثال فوق $|\vec{E}|$ و V را در نموداری بر حسب R رسم کنید



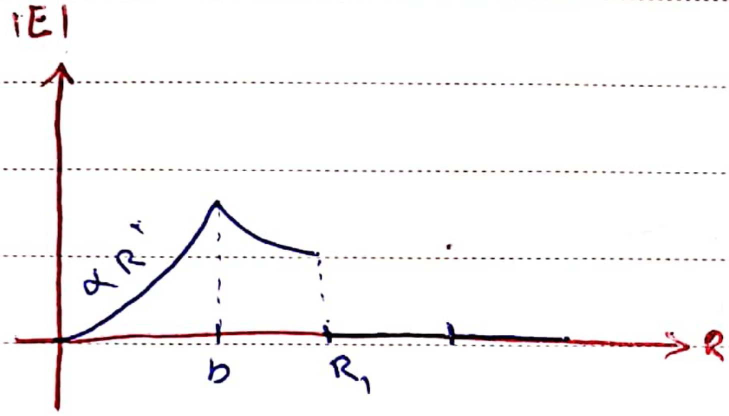
دقت کنید که در $R=0$ میدان صفر است

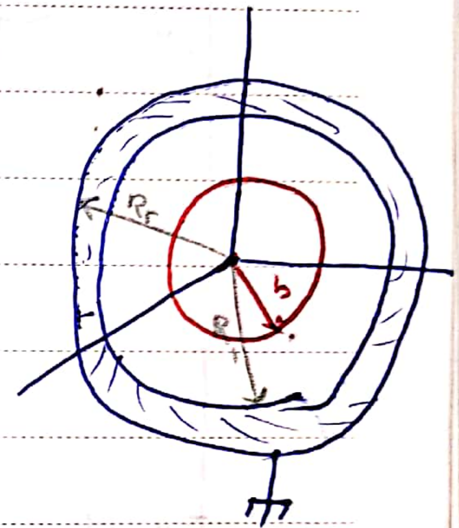
ولی در $R=0$ پتانسیل حداکثر است.

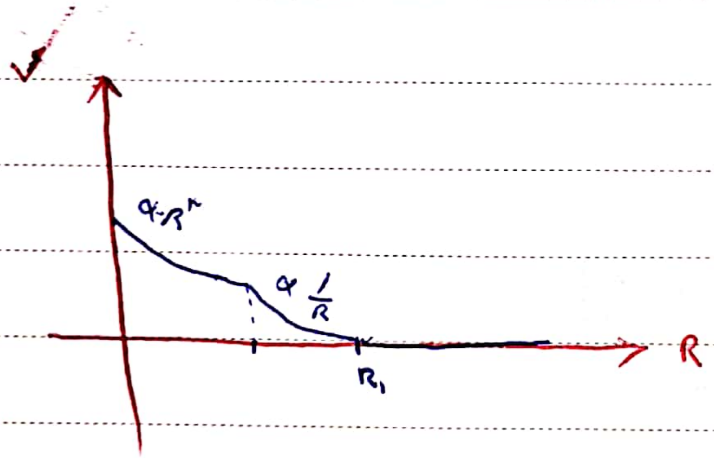


Subject.
Date.

مثال: اگر پوسته هادی را به زمین وصل کنیم نمودار چه تغییری می‌کند.



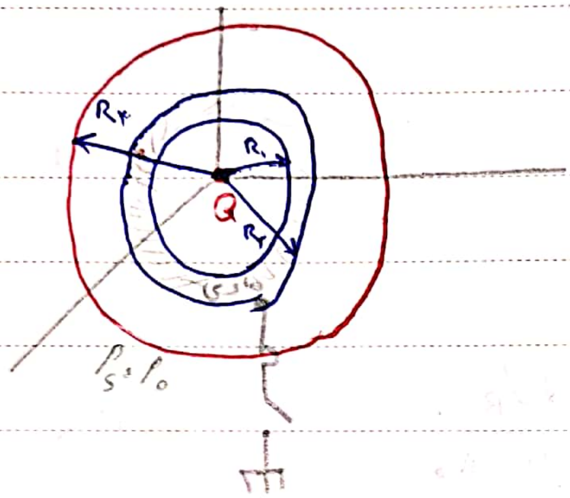




تمرین: در این مثال رابطه E و V را حساب کنید

Subject.
Date.

مثال ۱۵: بار نقطه Q در مبدا مختصات داخل پوسته هادی و پوسته باردار مطابق شکل قرار دارد.



در حالت: الف) کلید باز
ب) کلید بسته
$\vec{E}$ و V را در همه جا محاسبه کنید.

پاسخ: کلید باز: $|\vec{E}|$ ، $|\vec{E}|\hat{a}_R$ ، $\vec{E}$ روش گوس

$$
\begin{cases}
\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} & R < R_1 \\
0 & R_1 < R < R_2 \\
\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} & R_2 < R < R_3 \\
\dfrac{Q + \overset{\text{بار سطحی}}{\rho_0} \cdot \overset{\text{چگالی سطحی}}{4\pi R_3^2}}{4\pi R^2} & R_3 < R
\end{cases}
$$

Subject.

Date.

$$V = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^{R} |E|\, dl =$$

$$-\frac{Q + \rho_0 4\pi R_3^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{R}\frac{dR'}{R'^2} = \underbrace{\frac{Q + \rho_0 4\pi R_3^2}{4\pi\varepsilon_0 R}}_{R = R_3} \qquad R_3 < R < \infty$$

$$-\int_{\infty}^{R_3} - \int_{R_3}^{R} = -\int_{R_3}^{R}\frac{Q\, dR'}{4\pi\varepsilon_0 R'^2} \qquad R_2 < R < R_3$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} + \frac{\rho_0 R_3^2}{\varepsilon_0} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_3}\right)$$

$$= \frac{\rho_0 R_3^2}{\varepsilon_0} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$-\int_{\infty}^{R_2} - \int_{R_2}^{R} = \underbrace{\frac{\rho_0 R_3^2}{\varepsilon_0} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}} \qquad R_1 < R < R_2$$

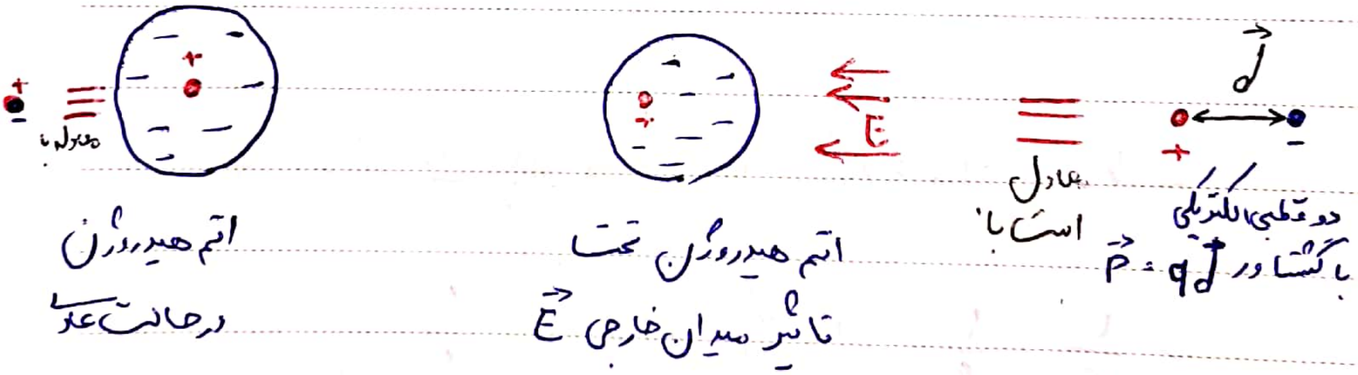
$$-\int_{\infty}^{R_1} - \int_{R_1}^{R} = -\int_{R_1}^{R}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R'^2} \qquad R < R_1$$

$$= \frac{\rho_0 R_3^2}{\varepsilon_0} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right)$$

Subject. پایانترم
Date.

میدان الکتریکی در مواد غیرهادی:

برای بررسی میدان الکتریکی در داخل مواد غیر هادی ابتدا اتم هیدروژن را تحت تاثیر میدان خارجی در نظر می‌گیریم شایان ذکر است که با توجه به فیزیک کوانتوم نمی‌توان هیدروژن را شامل یک پروتون و یک الکترون که به دور آن می‌چرخد در نظر گرفت (چون در اینصورت باید میدان متغیر با زمان در اطرافش ایجاد کند که این کار به معنای میدان الکترومغناطیس متغیر با زمان و تشعشع انرژی خواهد بود در صورتی که میدان اتم هیدروژن هیچ تشعشعی ندارد) بلکه هیدروژن را یک هسته با بار مثبت و یک ابر الکترونی بصورت کره باردار با چگالی بار حجمی ثابت به دورش در نظر می‌گیریم. (همان اوربیتال 1S) حال مطابق شکل زیر چنانچه این اتم تحت تاثیر میدان خارجی قرار گیرد تقارن اولیه‌اش را از دست می‌دهد و تبدیل به یک دوقطبی کوچک می‌شود.



زمانی که یک توده از مادهٔ غیرهادی تحت تاثیر میدان خارجی قرار می‌گیرد همه اتم‌ها تبدیل به دوقطبی‌های کوچک می‌شود پس توده‌ای از دوقطبی‌ها خواهیم داشت و خواهیم دید میدان E در داخل این توده ضعیف‌تر از میدان خارجی خواهد شد.

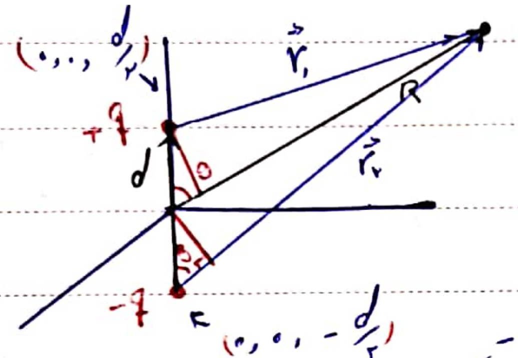
برای بررسی کمّی این اثر ابتدا پتانسیل و میدان حاصل از یک دوقطبی را در فاصله بسیار دور از آن بررسی می‌کنیم

Subject.

Date.

پتانسیل و میدان حاصل از دوقطبی با گشتاور $\vec{p}$ با فاصله بسیار دور از آن:

ابتدا این دوقطبی را بدون محور z در نظر می‌گیریم و سپس نتایج آن را تعمیم می‌دهیم. قبلاً پتانسیل را بطور دقیق حساب کرده ایم در اینجا می‌خواهیم در دستگاه کروی پتانسیل را تقریب بزنیم.



خیلی بزرگتر

اگر $R \gg d$ باشد میتوان فاصله r_1 و r_2 را بصورت زیر برحسب R نوشت.

$$r_1 \simeq R - \frac{d}{2}\cos\theta = R\left(1 - \frac{d}{2R}\cos\theta\right)$$

$$r_2 \simeq R + \frac{d}{2}\cos\theta = R\left(1 + \frac{d}{2R}\cos\theta\right)$$

شعاع های r_1 و r_2 را معادل R فرض کرده ایم

بسط بینم: $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + x^n$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_1} = \frac{1}{R}\cdot\underbrace{\left(1 - \frac{d}{2R}\cos\theta\right)^{-1}}\cdot\frac{1}{R}$$

$$\Big(1 + \underbrace{\left(-\frac{d}{2R}\cos\theta\right)}_{x}\Big)^{-1 \leftarrow n} \simeq 1 + \overbrace{\frac{d}{2R}\cos\theta}^{\ll 1 \text{ خیلی}} - \underbrace{\frac{2}{2}\left(\frac{d}{2R}\cos\theta\right)^2}_{\text{صرف نظر}} + \dots$$

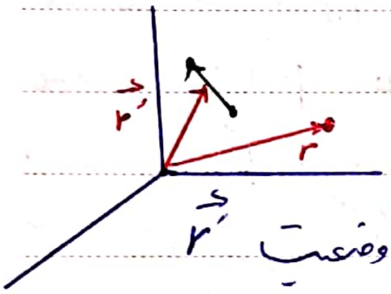
به همین ترتیب $\frac{1}{r_2} \simeq \frac{1}{R}\left(1 - \frac{d}{2R}\cos\theta\right)$

$$\Rightarrow V(R,\theta,\phi) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\Big[\underbrace{\left(1 + \frac{d}{2R}\cos\theta\right)}_{1/r_1} - \underbrace{\left(1 - \frac{d}{2R}\cos\theta\right)}_{1/r_2}\Big]$$

Subject.
Date.

$$\Rightarrow V(R,\theta,\phi) = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

سوال امتحان: پتانسیل حاصل از دوقطبی کوچک روی محور z در فاصله بسیار دور را بدست آورده و با استفاده از آن پتانسیل حاصل از دوقطبی مستقر در نقطه‌ای با بردار وضعیت $\vec{r}'$ را هم بنویسید



$V(\vec{r}) = ?$

تعمیم دادن سوال بالا:

تعمیم رابطه فوق برای دوقطبی مستقر در نقطه‌ای با بردار وضعیت $\vec{r}'$

برای تعمیم ابتدا رابطه فوق را برحسب گشتاور دوقطبی $\vec{p} = qd\hat{a}_z$ و بردار واصل از مرکز دوقطبی به نقطه مورد نظر یعنی $R\hat{a}_R$ می‌نویسیم.

$\overbrace{qd\,\hat{a}_z\cdot\hat{a}_R}^{\cos\theta}$

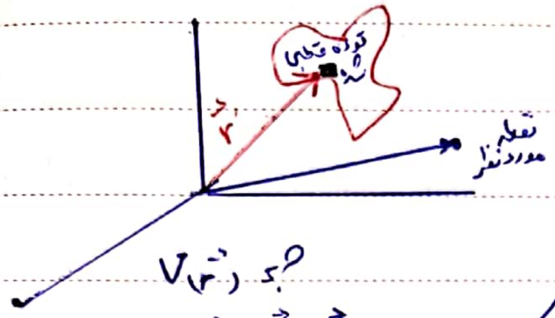
$$V(R,\theta,\phi) = \frac{\vec{p}\cdot\hat{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{R}|^3}$$

حال برای دوقطبی مستقر در $\vec{r}'$ و با گشتاور $\vec{p}$ براحتی می‌توان نوشت.

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Subject: هر چیزی که مربوط به بار است پریم می‌گذاریم.
Date.

پتانسیل حاصل از توده قطبی‌شده در نقطه دلخواه:



$V(\vec r)$?

$$V(\vec r) = \frac{\vec P\cdot(\vec r-\vec r')}{4\pi\varepsilon_0|\vec r-\vec r'|^3}$$

برای آنکه بتوان از ابزار انتگرال برای محاسبه پتانسیل همه اتم‌های قطبی شده بهره برد میدان قطبی‌شدگی را با بردار $\vec P$ تعریف می‌کنیم $\vec P(x_1,x_2,x_3)$ که از ضرب $\vec P$ در هر نقطه در دیفرانسیل حجم آن نقطه میتوان به گشتاور دوقطبی آن دیفرانسیل حجم رسید. $d\vec p = \vec P\, dv$

با داشتن $\vec P$ میتوان پتانسیل حاصل از توده را به شکل زیر حساب کرد.

$$V = \int_{\text{در حجم توده}} dV = \int_{\text{در حجم توده}} \frac{\overbrace{d\vec p}^{\vec P\, dv'}\cdot(\vec r-\vec r')}{4\pi\varepsilon_0|\vec r-\vec r'|^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{در حجم توده}} \frac{\vec P\cdot(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|^3}\, dv'$$

در رابطه فوق میتوان $\frac{(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|^3}$ را معادل $-\nabla\left(\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\right)$ ، معادل $\nabla'\left(\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\right)$ در نظر گرفت.

۹۸

Subject.
Date.

مثال ۱. در کارتزین ثابت کنید: $\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$

$\vec{r} = x\,\hat{a}_x + y\,\hat{a}_y + z\,\hat{a}_z$

$\vec{r}' = x'\,\hat{a}_x + y'\,\hat{a}_y + z'\,\hat{a}_z$

نسبت به مختصات پریم دار مشتق بگیریم.

$$\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = \nabla'\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right)$$

$$\nabla'\left(\left[(x-x')^2+(\ )^2+(\ )^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\ ]\,\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}[\ ]\,\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}[\ ]\,\hat{a}_z$$

$$= -\frac{1}{2}[\ ]^{-\frac{3}{2}} \cdot 2(x-x') \times -1\ \hat{a}_x + \dots\ \hat{a}_y + \dots\ \hat{a}_z$$

$$= \frac{(x-x')\,\hat{a}_x + (y-y')\,\hat{a}_y + (z-z')\,\hat{a}_z}{[\ ]^{3/2}} = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

PAPCO

Subject.
Date.

مثال ۱: در کارتزین ثابت کنید: $\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)=\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$

$\vec{r}=x\,\hat{a}_x+y\,\hat{a}_y+z\,\hat{a}_z$

$\vec{r}'=x'\,\hat{a}_x+y'\,\hat{a}_y+z'\,\hat{a}_z$

نسبت به مختصات پریم دار مشتق بگیریم:

$$\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)=\nabla'\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right)$$

$$\nabla'\left(\left[(x-x')^2+(\ )^2+(\ )^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\ ]\,\hat{a}_x+\frac{\partial}{\partial y}[\ ]\,\hat{a}_y+\frac{\partial}{\partial z}[\ ]\,\hat{a}_z$$

$$=-\frac{1}{2}[\ ]^{-\frac{3}{2}}\cdot 2(x-x')\times -1\ \hat{a}_x+\dots\hat{a}_y+\dots\hat{a}_z$$

$$=\frac{(x-x')\,\hat{a}_x+(y-y')\,\hat{a}_y+(z-z')\,\hat{a}_z}{[\ ]^{3/2}}=\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

میتوان پتانسیل حاصل از توده ماده قطبی شده را بصورت زیر نوشت

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \vec{P}\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) d_{v'}$$

با استفاده از اتحاد مقابل میتوان نوشت

دیورژانس

$$\nabla\cdot(\underset{\text{تابع اسکالر}}{f}\,\underset{\text{میدان برداری}}{\vec{F}}) = \vec{F}\cdot\nabla f + f\,\nabla\cdot\vec{F}$$

$$\Rightarrow \vec{F}\cdot\nabla f = \nabla\cdot(f\vec{F}) - f\,\nabla\cdot\vec{F} \qquad \vec{P}\equiv\vec{F},\quad f\equiv\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \nabla'\cdot\frac{\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d_{v'}}_{} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\nabla'\cdot\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d_{v'}$$

با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint\frac{\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\cdot \underset{|\vec{d_s}|\cdot\hat{a}_n}{\vec{d_s}} \; -$$

جملات فوق دقیقا شبیه فرمولهای هستند برای محاسبه پتانسیل حاصل از بار سطحی و حجمی داشتیم.

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \longrightarrow \begin{cases}\rho_s\, d_s\\ \rho_v\, d_v\end{cases}$$

Subject.
Date.

در مورد توده قطبی شده میتوان دو نوع چگالی بار در نظر گرفت که چگالی بارهای مقید نامیده می‌شود.

چگالی بار حجمی مقید $\rho_{v_b} = -\nabla \cdot \vec{P}$

چگالی بار سطحی $\rho_{s_b} = \vec{P} \cdot \hat{a}_n$

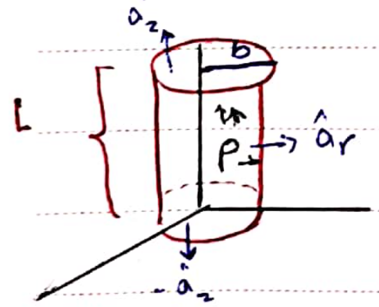
$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint \frac{\rho_{s_b}\, ds'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho_{v_b}\, dv'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

در سطح بیرونی توده — در حجم توده

مثال: مطابق شکل استوانه هم محور با محور z در اثر میدان خارجی دارای میدان قطبی شدگی بصورت: شده است. اولاً چگالی بارهای مقید را حساب کنید ثانیاً نشان دهید که در دو حالت کل بارهای مقید صفر است.

الف) $\vec{P} = P_0 \hat{a}_z$

ب) $\vec{P} = P_0 z \hat{a}_z$



الف) $\rho_{s_b} = \vec{P} \cdot \hat{a}_n$
- $P_0 \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = P_0 \quad [C/m^2]$ در قاعده بالا $\hat{a}_n = \hat{a}_z$
- $P_0 \underbrace{\hat{a}_z \cdot \hat{a}_r}_{\text{بر هم عمودند}} = 0$ در سطح جانبی $\hat{a}_n = \hat{a}_r$
- $P_0 \hat{a}_z \cdot (-\hat{a}_z) = -P_0 \quad [C/m^2]$ در قاعده پایین $\hat{a}_n = -\hat{a}_z$

$\rho_{v_b} = -\nabla \cdot \underbrace{\vec{P}}_{\text{ثابت}} = 0$

الف

کل بار مقید در حالت $\underbrace{\pi b^2}_{\text{مساحت قاعده}} \cdot P_0 + \pi b^2 (-P_0) = 0$

Subject.

Date.

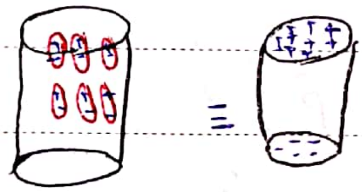
ب)

$$\rho_{sb} = \vec{P} \cdot \hat{a}_n \begin{cases} (\rho_0 L \, \hat{a}_z) \cdot a_z = \rho_0 L \ [C/m^2] & z = L \text{ در} \\ \rho_0 z \, \hat{a}_z \cdot \hat{a}_r = 0 & r = b \text{ در} \\ \rho_0 \times 0 \times \hat{a}_z (-\hat{a}_z) = 0 & z = 0 \text{ در} \end{cases}$$

$$\rho_{vb} = -\nabla \cdot \vec{P} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \underset{\downarrow 0}{P_x} + \frac{\partial}{\partial y} \underset{\downarrow 0}{P_y} + \frac{\partial}{\partial z} \underset{\downarrow \rho_0 z}{P_z}\right) = -\rho_0 \ [C/m^3]$$

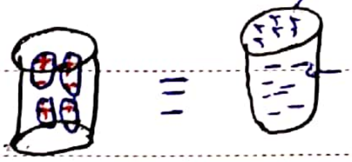
$$\text{کل بار مقید} = \underbrace{\rho_0 L}_{\text{چگالی بار سطحی}} \cdot \underbrace{\pi b^2}_{\text{مساحت}} + \underbrace{(-\rho_0)}_{\text{چگالی حجمی}} \cdot \underbrace{\pi b^2 \cdot L}_{\text{حجم}} = 0$$

همدیگر را خنثی می‌کنند



الف) قطبی شدگی یکنواخت

کاملا یکدیگر را خنثی نمی‌کنند متغیر بوده است



ب) قطبی شدگی متغیر